TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Skripten der Mathematischen Institute

Wolfgang Marten

Analysis

für Studierende der
Informatik und Wirtschaftsinformatik

Sommersemester 2015

Neunte, überarbeitete und erweiterte Auflage

Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen

Dr. Wolfgang Marten
Technische Universität Braunschweig
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Am Fallersleber Tore 1
D-38100 Braunschweig
Tel.: 0531 391 7404
E-Mail: `w.marten@tu-bs.de`

Haftungsausschluss: Die Informationen dieses Skiptes sind sorgfältig zusammengestellt und ausgearbeitet worden. Irgendeine Haftung für die Richtigkeit und Vollständigkeit wird nicht übernommen. Das Skript ist für den begleitenden Gebrauch zum Modul *Analysis für Informatiker* an der TU Braunschweig geschrieben worden.

Analysis
für Studierende der
Informatik und Wirtschaftsinformatik

Wolfgang Marten
Technische Universität Braunschweig

Mai 2015
Neunte, überarbeitete und erweiterte Auflage

Inhaltsverzeichnis

Druck und Bindung der ersten sieben Auflagen von 2007 bis 2013 sind aus dem Institutsetat und den Studiengebühren finanziert worden.

Achten Sie bitte auf Druckfehler.

Die Zahlen sind freie Schöpfungen
des menschlichen Geistes.
Richard Dedekind, 1887.
Vorwort zur ersten Auflage [21].

1 Reelle Zahlen

In diesem Abschnitt erörtern wir die reellen Zahlen. Die reellen Zahlen dienen zur Konstruktion von Skalen und dienen zur Beschreibung von Veränderungen. Aus Zeitgründen konstruieren wir die reellen Zahlen nicht aus den natürlichen Zahlen. Stattdessen denken wir uns die Konstruktion bereits ausgeführt und beschreiben die grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen durch Axiome. Insbesondere beschreiben wir, wie die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen enthalten sind.

Die Axiome zur Kennzeichnung der reellen Zahlen gliedern sich in die *Körperaxiome* 1.1, die *Axiome der Anordnung* 1.2 und das *Supremumsaxiom* 1.34.

Jede reelle Zahl besitzt eine einzige normale Dezimalentwicklung. Jede normale Dezimalentwicklung stellt genau eine reelle Zahl dar. Siehe das Beispiel 4.10 und den Beweis des Satzes 22.10.

Körperaxiome 1.1. *Die reellen Zahlen bilden einen Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. *Nach den Ausführungen in der* Linearen Algebra *bedeutet dies, dass es eine Addition* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ *und eine Multiplikation* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy = x \cdot y$ *mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : x + y = y + x\,,\ xy = yx\,.$

(2) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) : x + (y + z) = (x + y) + z\,,\ x(yz) = (xy)z\,.$

(3) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) : x(y + z) = xy + xz\,.$

(4) *Es gibt eindeutig bestimmte Elemente* $0 \in \mathbb{R}$ *und* $1 \in \mathbb{R}$ *derart, dass* (4.1) *bis* (4.5) *gelten.*

(4.1) $0 \neq 1\,.$
(4.2) $(\forall x \in \mathbb{R}) : x + 0 = x\,.$
(4.3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! y \in \mathbb{R}) : x + y = 0\,.$
(4.4) $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 \cdot x = x\,.$
(4.5) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists! y \in \mathbb{R}) : xy = 1\,.$

In (3) *ist die rechte Seite der Gleichung so zu verstehen, dass zuerst die beiden Multiplikationen ausgeführt werden und anschließend die Addition ausgeführt wird.*

Sei $x \in \mathbb{R}$. Das eindeutig bestimmte Element $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$ heißt die *negative Zahl* zu x und wird mit $-x$ bezeichnet. Für eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$-S = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in S) \colon y = -x\}\,.$$

Eine reelle Zahl y liegt genau dann in $-S$, wenn die reelle Zahl $-y$ in S liegt. Die *Differenz* $a - b$ zweier reeller Zahlen a und b wird durch

$$a - b = a + (-b)$$

definiert. Aus den Körperaxiomen 1.1 folgt insbesondere, dass

$$0 \cdot x = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zunächst gilt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x\,.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot x + (-(0 \cdot x)) &= \big(0 \cdot x + 0 \cdot x\big) + (-(0 \cdot x)) \\ &= 0 \cdot x + \big(0 \cdot x + (-(0 \cdot x))\big) \\ &= 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x\,. \end{aligned}$$

Die Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen bezeichnen wir mit

$$\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}\,.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^{\times}$. Das eindeutig bestimmte Element $y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1$ und heißt die *reziproke Zahl* zu x und wird wahlweise mit den Symbolen

$$x^{-1}\,, \quad \frac{1}{x}\,, \quad 1/x$$

bezeichnet. Den *Quotienten* $z : x$ zweier reeller Zahlen z und $x \neq 0$ definieren wir durch

$$z : x = zx^{-1} = z \cdot \frac{1}{x} = \frac{z}{x} = z \cdot (1/x) = z/x\,.$$

Bisher haben wir die negative Zahl $-x$ zu einer gegebenen reellen Zahl x definiert. Nun definieren wir die Menge der negativen reellen Zahlen. Dazu legen wir die Menge $\mathbb{R}_+$ der positiven reellen Zahlen axiomatisch fest. Aus den Axiomen 1.1 und 1.2 folgt, dass $1 \in \mathbb{R}_+$ gilt. Siehe Satz 1.6.

Axiome der Anordnung 1.2. *Es gibt eine Teilmenge* $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$ *mit den folgenden Eigenschaften* (1) *bis* (4)*.*

(1) $0 \notin \mathbb{R}_+ \cup (-\mathbb{R}_+)\,.$

(2) $\mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \emptyset\,.$

(3) $\mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup (-\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}\,.$

(4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}_+) :\ x + y\,,\ xy \in \mathbb{R}_+\,.$

Die Menge $\mathbb{R}_+$ *heißt* Menge der positiven (reellen) Zahlen*. Entsprechend heißt*

$$\mathbb{R}_- = -\mathbb{R}_+$$

die Menge der negativen (reellen) Zahlen*. Die Elemente aus* $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *heißen* nicht-negative Zahlen*. Die Elemente aus* $\mathbb{R}_- \cup \{0\}$ *heißen* nicht-positive Zahlen*.*

Mit Hilfe der Menge $\mathbb{R}_+$ lassen sich die Relationen $x < y$, $x \leq y$, $y > x$, $y \geq x$ definieren.

Definition 1.3. *Seien x, $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren:*

(1) $x < y \Leftrightarrow x$ kleiner $y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$.

(2) $x \leq y \Leftrightarrow x$ kleiner oder gleich $y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

(3) $y > x \Leftrightarrow y$ größer $x \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$.

(4) $y \geq x \Leftrightarrow y$ größer oder gleich $x \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

(5) x positiv $\Leftrightarrow 0 < x \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$.

(6) x nicht-negativ $\Leftrightarrow 0 \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$.

(7) x negativ $\Leftrightarrow 0 > x \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow (-x) \in \mathbb{R}_+$.

(8) x nicht positiv $\Leftrightarrow 0 \geq x \Leftrightarrow x \leq 0$.

(9) $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$.

(10) $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$.

Satz 1.4 (Trichotomie)**.** *Seien x, $y \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Dann gilt genau eine der drei Relationen $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.*

Beweis. Der Satz 1.4 ist lediglich eine Umformulierung der ersten drei Axiome der Anordung (1), (2), (3). Siehe 1.2 und 1.3. □

Satz 1.5 (Transivität)**.** *Für alle x, y, $z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $y < z$ gilt $x < z$.*

Beweis. Seien x, y, $z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $y < z$ gegeben. Dann gibt es $\epsilon_1 \in \mathbb{R}_+$ und $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$x + \epsilon_1 = y\,, \quad y + \epsilon_2 = z\,.$$

Nach Axiom (4) der Anordnung gilt $\epsilon_1 + \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+$. Das Assoziativgesetz der Addition liefert

$$x + (\epsilon_1 + \epsilon_2) = (x + \epsilon_1) + \epsilon_2 = y + \epsilon_2 = z\,.$$

Siehe (2) in 1.1. Also gilt $x < z$. Siehe 1.3. □

Wegen der Transitivität schreiben wir $x < y < z$ genau dann, wenn die beiden Bedingungen $x < y$ und $y < z$ erfüllt sind. Sinngemäß sind $x \leq y < z$ und $x < y \leq z$ und $x \leq y \leq z$ zu verstehen.

Satz 1.6. *Es gelten die folgenden Aussagen.*

(1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\colon\ x < y \Rightarrow x + z < y + z\,.$

(2) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}_+)\colon\ x < y \Rightarrow xz < yz\,.$

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ 0 = 0 \cdot x\,.$

(4) $0 < 1\,.$

(5) $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ (-1) \cdot x = -x\,.$

(6) $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ x = -(-x)\,.$

(7) $(-1) \cdot (-1) = 1\,.$

(8) $-1 < 0\,.$

(9) $(\forall x, y \in \mathbb{R}_-)\colon\ x + y \in \mathbb{R}_-\,.$

(10) $(\forall x \in \mathbb{R}_-)\colon\ (-1) \cdot x = -x \in \mathbb{R}_+\,.$

(11) $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\colon\ (-1) \cdot x = -x \in \mathbb{R}_-\,.$

(12) $(\forall x, y \in \mathbb{R}_-)\colon\ xy \in \mathbb{R}_+\,.$

(13) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\colon\ x < y \Leftrightarrow -x > -y\,.$

(14) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}_-)\colon\ x < y \Rightarrow xz > yz\,.$

(15) $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\forall y \in \mathbb{R}_-)\colon\ xy \in \mathbb{R}_-\,.$

(16) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy > 0$ gilt genau eine der beiden Alternativen* (i) *oder* (ii)*.*

  (i) $\{x, y\} \subseteq \mathbb{R}_+\,.$
  (ii) $\{x, y\} \subseteq \mathbb{R}_-\,.$

(17) $(\forall x \in \mathbb{R}^\times)\colon\ x^2 = xx > 0\,.$

Nach Satz 1.6 sind Quadrate von Null verschiedener reeller Zahlen positiv. Erst mit dem *Supremumsaxiom* kann gezeigt werden, dass alle positiven reellen Zahlen eine *positive Quadratwurzel* besitzen.

Als erste Anwendung der Axiome der Anordnung definieren wir die Betragsfunktion $|\,.\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Signumfunktion $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Betragsfunktion ist für die Definition des Grenzwertbegriffes und der Stetigkeit von großer Bedeutung.

Satz und Definition 1.7. *Die Funktion* $|\,.\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0\,, \\ 0, & x = 0\,, \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

heißt die Betragsfunktion*. Der* Betrag $|x|$ *einer reellen Zahl x ist stets größer oder gleich Null. Es gelten:*

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ |-x| = |x| \geq 0\,.$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$

(3) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\colon\ |xy| = |x|\,|y|\,.$

(4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\colon\ |x+y| \leq |x| + |y|\,.$

(5) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\colon\ ||x| - |y|| \leq |x-y|\,.$

(6) $(\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0})(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a\,.$

Satz und Definition 1.8. *Die Funktion* $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1\,, & x < 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,, \\ 1\,, & x > 0 \end{cases}$$

heißt Signum-Funktion*. Es gelten:*

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ x = \operatorname{sgn}(x)\,|x|\,.$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ |x| = \operatorname{sgn}(x)\,x\,.$

Später werden wir Funktionen auf Monotonie untersuchen. Wir untersuchen mit anderen Worten, ob eine gegebene Funktion auf gewissen Teilmengen ihres Definitionsbereiches die Ordungsrelationen $<$ und $\leq$ erhält oder umkehrt. Die Betragsfunktion ist auf dem Intervall $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. Für weitere Beispiele siehe 1.11 und 1.12. Der Begriff einer Teilfolge macht vom Monotoniebegriff Gebrauch. Siehe Definition 2.2 und den Beweis des Satzes 2.6.

Definition 1.9 (Monotonie)**.** *Seien D, A, $B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen mit $A \subseteq D$ und $\varphi : D \to B$ eine Funktion. Wir definieren:*

(1) φ *ist* monoton wachsend auf A*, wenn*

$$(\forall x, y \in A) : x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$$

gilt. Wir sagen dann auch, dass φ auf A monoton wächst.

(2) φ *ist* streng monoton wachsend auf A*, wenn*

$$(\forall x, y \in A) : x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$$

gilt. Wir sagen dann auch, dass φ auf A streng monoton wächst.

(3) φ *ist* monoton fallend auf A*, wenn*

$$(\forall x, y \in A) : x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$$

gilt. Wir sagen dann auch, dass φ auf A monoton fällt.

(4) φ *ist* streng monoton fallend auf A, *wenn*

$$(\forall x, y \in A) : x < y \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$$

gilt. Wir sagen dann auch, dass φ auf A streng monoton fällt.

Als Monotoniebereiche sind Intervalle von besonderem Interesse. Später werden wir die berühmten ϵ-Umgebungen kennenlernen.

Der Logarithmus und die Exponentialfunktion sind auf $\mathbb{R}_+$ respektive $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Erste einfache Beispiele für Monotoniebereiche werden in 1.11, 1.12 und 1.41 behandelt.

Definition 1.10 (Intervalle)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ beliebig gegeben. Wir setzen:*

(1) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

(2) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

(3) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

(4) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

(5) $\mathbb{R}_{>a} = (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

(6) $\mathbb{R}_{\geq a} = [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

(7) $\mathbb{R}_{<a} = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.

(8) $\mathbb{R}_{\leq a} = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.

Die Mengen (1) *bis* (4) *heißen* Intervalle *von a bis b. Die Menge (a, b) heißt das* offene Intervall *von a bis b. Die Menge $[a, b]$ ist das* abgeschlossene Intervall *von a bis b. Die Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$ sind* halboffen*. Das Intervall $[a, b)$ ist* links abgeschlossen *und* rechts offen*. Das Intervall $(a, b]$ ist* links offen *und* rechts abgeschlossen.

Beispiele 1.11 (Monotonieverhalten der Betragsfunktion)**.**

(1) $|\,.\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend.

(2) $|\,.\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

Für weitere Beispiele siehe 1.12 und 1.41. $\square$

Beispiele 1.12.

(1) $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p_1(x) = x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(2) $p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p_2(x) = x^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

(3) $p_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p_3(x) = x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Vergleiche Beispiel 1.21. $\square$

Der folgende einfache Sachverhalt ist bei Untersuchungen von Quotienten vor allem im Zusammenhang mit Stetigkeit und Differenzierbarkeit wichtig.

Satz 1.13. *Sei $b \in \mathbb{R}^\times$. Dann besteht das abgeschlossene Intervall*

$$\left[\, b - \tfrac{1}{2}|b|, b + \tfrac{1}{2}|b| \,\right]$$

entweder nur aus negativen oder nur aus positiven reellen Zahlen. Es gilt also genau eine der beiden folgenden Alternativen (1) *oder* (2).

(1) *Für $b < 0$ gilt*

$$b \in \left[\, b - \tfrac{1}{2}|b|, b + \tfrac{1}{2}|b| \,\right] = \left[\, \tfrac{3}{2}b, \tfrac{1}{2}b \,\right] \subseteq \mathbb{R}_- \,.$$

(2) *Für $b > 0$ gilt*

$$b \in \left[\, b - \tfrac{1}{2}|b|, b + \tfrac{1}{2}|b| \,\right] = \left[\, \tfrac{1}{2}b, \tfrac{3}{2}b \,\right] \subseteq \mathbb{R}_+ \,.$$

Siehe die Sätze 6.15 *und* 10.14.

Wir beschreiben nun, wie sich die natürlichen Zahlen und damit die ganzen Zahlen sowie die rationalen Zahlen in dem geordneten Körper $\mathbb{R}$ wiederfinden lassen.

Definition 1.14. *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ heißt* induktiv*, wenn die beiden Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt sind.*

(1) $1 \in S$.

(2) $(\forall k \in S)\colon\ k + 1 \in S$.

Die Menge $\mathbb{R}_+$ der positiven reellen Zahlen ist induktiv. Der Durchschnitt einer nicht-leeren Familie induktiver Mengen ist induktiv. Folglich ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ eine induktive Menge. Induktive Mengen sind nicht leer. Wie wir sehen werden, enthalten die induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ alle natürlichen Zahlen.

Satz und Definition 1.15.

(1) *Der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ heißt* Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. *Die Elemente von $\mathbb{N}$ heißen* natürliche Zahlen.

(2) *Die Menge $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

(3) *Wie üblich setzen wir*

$$2 = 1 + 1\,, \quad 3 = 2 + 1\,, \quad 4 = 3 + 1\,, \quad \ldots\,.$$

(4) *Wegen Satz* 1.6 *gilt*

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots\,.$$

Entsprechend schreiben wir

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}\,, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\,.$$

(5) *Wir setzen*

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\,,\\ &\mathbb{Z}_- = -(\mathbb{Z}_+) = -\mathbb{N} = \{\alpha \in \mathbb{R}_- \mid (\exists n \in \mathbb{N}) : \alpha = -n\}\,,\\ &\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-\,. \end{aligned}$$

(6) *Die Menge* $\mathbb{Z}$ *heißt* Menge der ganzen Zahlen*. Entsprechend ist* $\mathbb{Z}_-$ *die* Menge der negativen ganzen Zahlen *und* $\mathbb{Z}_+$ *die* Menge der positiviven ganzen Zahlen*.*

(7) *Wir setzen*

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid (\exists p \in \mathbb{Z})(\exists q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \alpha = p\,q^{-1}\}\,,\\ &\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+\,,\\ &\mathbb{Q}_- = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_-\,. \end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ *heißt* Menge der rationalen Zahlen*. Entsprechend ist* $\mathbb{Q}_-$ *die* Menge der negativen rationalen Zahlen *und* $\mathbb{Q}_+$ *die* Menge der positiven rationalen Zahlen*.*

(8) *Es bestehen die Inklusionen*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Mit dem Supremumsaxiom 1.34 *folgt, dass sogar die echte Inklusion*

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

gilt. Siehe die Sätze 1.52 *und* 1.53*. Mit der Einschränkung der Addition* $+$ *und der Multiplikation* $\cdot$ *versehen, ist* $\mathbb{Q}$ *ist ein echter Teilkörper von* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*. Die Elemente von* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *heißen* irrationale Zahlen*.*

(9) *Für* $a \in \mathbb{R}$ *und* $S \subseteq \mathbb{R}$ *setzen wir*

$$S_{\geq a} = S \cap \mathbb{R}_{\geq a} = \{s \in S \mid s \geq a\}\,.$$

Analog definieren wir die Teilmengen $S_{>a}$, $S_{\leq a}$, $S_{<a}$*.*

Der folgende Satz 1.16 ist für die *Beweismethode der vollständigen Induktion* grundlegender Bedeutung.

Satz 1.16 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit*

(1) $1 \in S$,

(2) $(\forall k \in S)\colon\ k+1 \in S$.

Dann gilt $S = \mathbb{N}$.

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften (1) und (2) ist S eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Nach Definition 1.15 ist $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$. Also gilt $S = \mathbb{N}$. □

Der Satz 1.16 lässt sich durch eine Verschiebung auf Teilmengen von $\mathbb{Z}$ der Form $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ verallgemeinern. Nach Definition besteht die Menge $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ aus allen ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

Satz 1.17 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ gegeben. Sei $T \subseteq \mathbb{Z}_{\geq n_0}$ eine Teilmenge mit*

(1) $n_0 \in T$,

(2) $(\forall k \in T)\colon\ k+1 \in T$.

Dann gilt $T = \mathbb{Z}_{\geq n_0}$.

Beweis. Die verschobene Menge

$$S = (1-n_0) + T = \{1 - n_0 + k \in \mathbb{Z} \mid k \in T\}$$

ist eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Nach Satz 1.16 gilt $S = \mathbb{N}$. Folglich gilt

$$T = (n_0 - 1) + \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq n_0}.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Die *Beweismethode der vollständigen Induktion* des Satzes 1.18 ist lediglich eine Umformulierung des Satzes 1.17. Oft werden Induktionsbeweise mit Hilfe des *Wohlordnungssatzes* 1.29 geführt, einer Variante des Satzes 1.16.

Satz 1.18 (Beweismethode der vollständigen Induktion)**.** *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$ sei $A(n)$ eine wohldefinierte Aussage, die von n abhängt. Wenn die beiden folgenden Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt sind, gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$.*

(1) *Es gilt $A(n_0)$.*

(2) *Für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$ gilt die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.*

Wir schreiben dafür das folgende Schema.

$$\begin{array}{l} \vdash\ A(n_0)\,. \\ \vdash\ \big(\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}\big) : \big(A(n) \Rightarrow A(n+1)\big)\,. \\ \hline \vdash\ \big(\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}\big) : A(n)\,. \end{array}$$

Dabei ist $\vdash$ *das Behauptungszeichen von Bertrand Russell und Alfred North Whitehead.*

Beweis. Die Teilmenge

$$T = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0} \mid A(n)\}$$

von $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ erfüllt die Bedingungen (1) und (2) des Satzes 1.17. (Die Wohldefiniertheit der $A(n)$ stellt sicher, dass T eine Teilmenge von $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ ist. Für die Einzelheiten verweisen wir auf Vorlesungen über mathematische Logik und Mengenlehre.) Also gilt $T = \mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Folglich gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$. □

Beispiel 1.19. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Erster Beweis. Wir beweisen diese Aussagen zuerst mit einem Verfahren, dass der Anekdote nach von Carl Friedrich Gauß in Braunschweig als kleiner Schuljunge angewendet worden ist. Die Formel ist seit der Antike bekannt. Mit Gauß notieren wir die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis n einmal vorwärts und einmal rückwärts.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Wir erhalten auf diese Weise n Paare übereinander stehender Zahlen, deren Summe jeweils $n+1$ ergibt. Daher gilt

$$2 \cdot \big(1 + \ldots + n\big) = n \cdot (n+1)\,.$$

Damit folgt die behauptete Aussage.

Zweiter Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Die Formel gilt für $n = 1$ wegen

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1\,, \qquad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\,.$$

Dies ist der Induktionsanfang.

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Wir setzen die Gültigkeit von

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

voraus und zeigen, dass dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

folgt. *Dies ist der Induktionsschluss.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \,.
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis beendet. □

Beispiel 1.20 (Geometrische Summenformel)**.** *Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *und jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\,, & x \neq 1\,, \\ n + 1\,, & x = 1\,. \end{cases}$$

Dabei wird die k*-te Potenz* x^k *von* x *für jedes* $k \in \mathbb{N}_0$ *induktiv durch*

$$x^0 = 1\,, \quad x^{k+1} = x^k x$$

definiert. Wir beweisen die Summenformel für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ gelten

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = 1\,, \quad \frac{1-x}{1-x} = 1\,.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig gewählt. Wir setzen die Gültigkeit von

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\,.$$

voraus. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1}(1 - x)}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis im Fall $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beendet. Die Summenformel ist im Fall $x = 1$ klar. □

Beispiel 1.21. *Es gilt*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u, v \in \mathbb{R}_+) : \; u < v \;\Leftrightarrow\; u^n < v^n \,.$$

Nach dem Trichotomiegesetz 1.4 genügt es, die Aussage

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u, v \in \mathbb{R}_+) : \; u < v \;\Rightarrow\; u^n < v^n$$

zu beweisen. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist trivialerweise erfüllt. Der Induktionsschluss ergibt sich folgendermaßen:

$$u^{n+1} = u^n u < v^n u < v^n v = v^{n+1} \,.$$

Damit ist der Induktionsbeweis beendet. □

Beispiel 1.22 (Bernoulli'sche Ungleichung)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Die Ungleichung gilt trivialerweise für $n = 0$. Der Schluss von n auf $n+1$ verläuft folgendermaßen:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n (1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x \,.\end{aligned}$$

Der Induktionsbeweis ist damit beendet. □

Beispiel 1.23 (Binomialsatz)**.** Es gilt

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}_0) : \; (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \,.$$

Wir erinnern bei dieser Gelegenheit an die Definitionen der *Fakultäten* $n!$ und der *Binomialkoeffizienten* $\binom{\alpha}{k}$.

(1) $0! = 1\,.$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}_0) : (n + 1)! = (n!) \cdot (n + 1)\,.$

(3) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}_-) : \dbinom{\alpha}{k} = 0\,.$

(4) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) : \dbinom{\alpha}{0} = 1\,.$

(5) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}_+) : \dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}\,.$ □

Beispiel 1.24. In der Vorlesung *Lineare Algebra* haben wir den Spektralsatz durch vollständige Induktion bewiesen.

Bevor wir den Wohlordnungssatz 1.29 für die Menge $\mathbb{N}$ beweisen, führen wir zur präzisen Formulierung den Begiff einer nach unten beschränkten Menge und den Begriff des kleinsten Elementes ein.

Satz und Definition 1.25. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.*

(1) *Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt eine* untere Schranke *von S, wenn*

$$(\forall s \in S): \ x \leq s$$

erfüllt ist. Dafür ist auch die Schreibweise $x \leq S$ üblich.

(2) *Die Menge S heißt* nach unten beschränkt*, wenn sie eine untere Schranke besitzt. Andernfalls heißt die Menge S* nach unten unbeschränkt*.*

(3) *Es gibt höchstens eine untere Schranke von S, die in S enthalten ist. Im Falle der Existenz heißt diese untere Schranke das* kleinste Element *oder das* Minimum *von S und wird mit* $\min(S)$ *bezeichnet. Dann gelten*

$$\min(S) \leq S\,, \quad \min(S) \in S\,.$$

(4) *Die leere Menge besitzt kein Minimum.*

Beweis. Es ist lediglich die Einzigkeitsaussage zu beweisen. Seien x, $y \in S$ mit

$$(\forall s \in S): x \leq s\,, \ y \leq s$$

gegeben. Dann folgt die Einschließung

$$x \leq y \leq x\,.$$

Also gilt $x = y$. Die Einzigkeitsaussage ist damit bewiesen. □

Beispiele 1.26.

(1) Alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 1$ sind untere Schranken von $\mathbb{N}$. Es gilt $\min(\mathbb{N}) = 1$.

(2) $\min(\{3, 4, 5\}) = 3$.

(3) Jede nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Minimum.

(4) Alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 0$ sind untere Schranken der Menge

$$\mathbb{N}^{-1} = \{r \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}): r = n^{-1}\} = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\}\,.$$

Die *Menge* $\mathbb{N}^{-1}$ *der Stammbrüche* besitzt kein Minimum.

(5) Die Menge $W_2 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{Q}$ mit

$$x_1 = 2\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach unten durch 0 beschränkt. Aber W_2 besitzt kein Minimum. Siehe Beispiel 2.17.

(5) Alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 0$ sind untere Schranken des halboffenen Intervalles $(0, 1]$. Es gilt

$$(\forall s \in (0,1]) : 0 < \tfrac{1}{2} \cdot s < s\,.$$

Das Intervall $(0, 1]$ besitzt kein Minimum. □

Satz und Definition 1.27. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Dann gibt es höchstens ein $x \in \mathbb{R}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften* (1) *und* (2)*.*

(1) *x ist untere Schranke von S.*

(2) *Wenn $y \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von S ist, dann gilt $y \leq x$.*

Die eindeutig bestimmte reelle Zahl x heißt im Falle der Existenz das Infimum *von S und wird mit* $\inf(S)$ *bezeichnet.*

Beispiele 1.28.

(1) Das Infimum von $\mathbb{N}^{-1}$ können wir erst nach Einführung des Supremumsaxioms 1.34 berechnen. Dieses Axiom schließt aus, dass es eine positive reelle Zahl gibt, die kleiner als jede rationale Zahl der Form $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist. Siehe Satz 1.38.

(2) $\inf((0, 1]) = 0$.

(3) $\inf([0, 1]) = \min([0, 1]) = 0$. □

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen enthält ein kleinstes Element. Nach Konstruktion 1.15 gilt nämlich $1 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Tatsächlich enthält jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element.

Satz 1.29 (Wohlordnungssatz für $\mathbb{N}$)**.** *Jede nicht-leere Menge $T \subseteq \mathbb{N}$ enthält ein kleinstes Element.*

Beweis. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine nicht-leere Teilmenge, die kein kleinstes Element besitzt. Wir zeigen, dass die Menge

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall t \in T) :\, n < t\}$$

induktiv ist. Weil T kein kleinstes Element enthält, gilt $1 \notin T$. Also gilt $1 \in S$. Sei $k \in S$. Dann gilt

$$(\forall t \in T): \; k < t\,.$$

Angenommen, es gilt $k+1 \notin S$. Dann gilt

$$(\exists t_1 \in T): \; t_1 \leq k+1\,.$$

Weil T kein kleinstes Element enthält, gilt

$$(\exists t_2 \in T): \; t_2 < t_1\,.$$

Folglich gilt $t_2 \leq k$ im Widerspruch zu $k < t$ für alle $t \in T$. Also gilt $k+1 \in S$. Damit ist gezeigt, dass $S \subseteq \mathbb{N}$ induktiv ist.

Nach Satz 1.16 gilt $S = \mathbb{N}$. Weil T eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, gilt

$$(\exists t_0 \in \mathbb{N}): \; t_0 \in T \subseteq \mathbb{N} = S\,.$$

Nach Definition von S gilt

$$(\forall t \in T): \; t_0 < t\,.$$

Damit haben wir den Widerspruch $t_0 < t_0$ erreicht. Also kann es keine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ geben, die kein kleinstes Element enthält. $\square$

Der Wohlordungssatz 1.29 lässt sich auf Mengen der Form $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ mit $n_0 \in \mathbb{Z}$ übertragen. Als Anwendung des Wohlordungssatzes für $\mathbb{N}_0$ zeigen wir den Divisionssatz von Euklid.

Satz 1.30 (Divisionssatz von Euklid)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ gegeben. Dann gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, $r \in \mathbb{Z}$ mit*

$$a = b \cdot q + r\,, \quad 0 \leq r < |b|\,.$$

Der nicht-negative Rest r wird durch die Minimaleigenschaft

$$r = \min(\{m \in \mathbb{N}_0 \mid (\exists c \in \mathbb{Z})\colon a - |b| \cdot c = m\})$$

festgelegt. Die ganzen Zahlen q und r lassen sich mit Hilfe der Flurfunktion beschreiben. Siehe 1.42.

Beweis. Die Existenz des kleinsten nicht-negativen Restes folgt aus der Wohlordnung der Menge $\mathbb{N}_0$.

Existenz. Sei $T \subseteq \mathbb{N}_0$ die Teilmenge

$$T = \mathbb{N}_0 \cap (a - |b| \cdot \mathbb{Z}) = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid (\exists c \in \mathbb{Z})\colon a - |b| \cdot c = m\}\,.$$

Im Fall $a \geq 0$ gilt $0 \leq a = a - |b| \cdot 0 \in T$. Im Fall $a < 0$ gilt $0 \leq a - |b| \cdot a \in T$, denn es gilt $1 \leq |b|$. Also ist T eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$.

Nach dem Wohlordungssatz für $\mathbb{N}_0$ enthält T ein kleinstes Element r. Nach Konstruktion von r gibt es p, $q \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = |b| \cdot p + r = b \cdot \operatorname{sgn}(b) \cdot p + r = b \cdot q + r\,, \quad q = \operatorname{sgn}(b) \cdot p\,.$$

Angenommen, es gilt $|b| \leq r$. Dann liefert die Zerlegung

$$a = b \cdot q + r = b \cdot q + |b| + (r - |b|) = |b| \cdot (p + 1) + (r - |b|)$$

einen Widerspruch zur Minimalität von r in T. Damit ist der Existenzbeweis beendet.

Einzigkeit. Seien q_1, q_2, r_1, $r_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2\,, \quad 0 \leq r_1, r_2 < |b|$$

gegeben. Dann gilt

$$|b| \cdot |q_1 - q_2| = |r_1 - r_2| < |b|\,,$$

wobei $|q_1 - q_2|$ und $|r_1 - r_2|$ nicht-negative ganze Zahlen sind. Die Annahme $|q_1 - q_2| \neq 0$ führt auf einen Widerspruch. Also folgen $q_1 = q_2$ und $r_1 = r_2$. $\square$

Wir untersuchen nun, ob die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen nach oben beschränkt ist. Beschränkheit nach oben, Maximum und Supremum definieren wir in Analogie zu 1.25 und 1.27.

Satz und Definition 1.31. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.*

(1) *Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt eine* obere Schranke *von S, wenn die Bedingung*

$$(\forall s \in S) :\ s \leq x$$

erfüllt ist. Dafür ist auch die Schreibweise $S \leq x$ üblich.

(2) *Die Menge S heißt* nach oben beschränkt*, wenn sie eine obere Schranke besitzt. Andernfalls heißt S* nach oben unbeschränkt.

(3) *Es gibt höchstens eine obere Schranke von S, die in S enthalten ist. Im Falle der Existenz heißt diese obere Schranke das* größte Element *oder das* Maximum *von S und wird mit $\max(S)$ bezeichnet. Dann gelten*

$$S \leq \max(S)\,, \quad \max(S) \in S\,.$$

Die leere Menge besitzt kein Maximum.

Satz und Definition 1.32. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Dann gibt es höchstens ein $x \in \mathbb{R}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften* (1) *und* (2).

(1) *x ist obere Schranke von S.*

(2) *Wenn $y \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von S ist, dann gilt $x \leq y$.*

Die eindeutig bestimmte reelle Zahl x heißt im Falle der Existenz das Supremum *von S und wird mit* $\sup(S)$ *bezeichnet.*

Beispiele 1.33.

(1) $\max(\{1,2,3,4\}) = 4$.

(2) Jede nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum.

(3) $[0,1)$ besitzt kein Maximum.

(4) $\sup([0,1)) = 1$.

(5) $\max([0,1]) = \sup([0,1]) = 1$. □

Für den Nachweis, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen nach oben unbeschränkt ist, benötigen wir das *Supremumsaxiom*. Dieses Axiom schließt aus, dass es eine *reelle* Zahl $b \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Bisher ist nur klar, dass es keine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $n \leq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ geben kann.

Supremumsaxiom 1.34 (Richard Dedekind)**.** *Jede nicht-leere Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$, die nach oben beschränkt ist, besitzt ein Supremum.*

Wir werden sehen, dass das Supremumsaxiom viele wichtige Eigenschaften des Körpers $\mathbb{R}$ sicherstellt. Die Körperaxiome, die Axiome der Anordung und das Supremumsaxiom kennzeichnen den Körper der reellen Zahlen. Alternativ zum Supremumsaxiom 1.34 hätten wir ebensogut Satz 1.35 als Infimumsaxiom formulieren können.

Satz 1.35 (Satz vom Infimum)**.** *Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nach unten beschränkt ist, besitzt ein Infimum.*

Beweis. Weil die Menge $-S$ nicht-leer und nach oben beschränkt ist, existiert das Supremum von $-S$. Offenbar ist die reelle Zahl

$$x_0 = -\sup(-S)$$

eine untere Schranke von S. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige untere Schranke von S. Dann ist $-x$ eine obere Schranke von $-S$. Also gilt

$$-x_0 = \sup(-S) \leq -x \,.$$

Es folgt $x \leq x_0$. Daher ist x_0 die größte untere Schranke von S. Also gilt

$$\inf(S) = -\sup(-S) \,.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Nun beweisen wir mit Hilfe des Supremumsaxioms, dass die Menge $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist.

Satz 1.36. *Die Menge* $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen ist nach oben unbeschränkt.*

Beweis. Die Menge $\mathbb{N}$ ist nicht-leer. Wir nehmen an, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Unter dieser Annahme existiert nach dem Supremumsaxiom 1.34 eine kleinste obere Schranke $b \in \mathbb{R}$ von $\mathbb{N}$. Insbesondere gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \ n \leq b\,.$$

Weil b die kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, ist $b-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Also gilt

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \ b - 1 < n_0\,.$$

Es folgt der Widerspruch

$$b < n_0 + 1 \in \mathbb{N}\,.$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist. Damit ist der Beweis beendet. □

Satz 1.36 hat die archimedische Ordnungseigenschaft der reellen Zahlen zur Folge. Daraus folgern wir, dass

$$\inf(\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\}) = 0$$

gilt. Siehe 1.38. Aus der archimedischen Ordnungseigenschaft ergibt sich außerdem, wie wir später sehen werden, dass die Folge

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

gegen Null konvergiert. Wir sprechen die archimedische Ordnungseigenschaft in drei äquivalenten Versionen aus.

Satz 1.37 (Archimedische Ordnungseigenschaft. Archimedes, Eudoxus)**.** *Es gelten die folgenden äquivalenten Aussagen* (1) *bis* (3)*.*

(1) $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) : \ x < n\,.$

(2) $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) : \ x < n\epsilon\,.$

(3) $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) : \ 0 < n^{-1} < \epsilon\,.$

Eigenschaft (1) *gilt, weil* $\mathbb{N}$ *nach oben unbeschränkt ist. Siehe Satz* 1.36*.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis von (1)*.* Angenommen, es gilt (1) nicht. Dann gilt

$$(\exists x \in \mathbb{R}_+)(\forall n \in \mathbb{N}) : \ n \leq x\,.$$

Dies ein Widerspruch zu Satz 1.36. Damit ist (1) bewiesen.

Nachweis von (1) $\Leftrightarrow$ (2). Für $x\epsilon^{-1}$ anstelle von x folgt (2) aus (1). Umgekehrt folgt (1) aus (2) für $\epsilon = 1$.

Nachweis von (2) $\Rightarrow$ (3). Aussage (3) folgt aus (2) für $x = 1$.

Nachweis von (3) $\Rightarrow$ (1). Sei $x \in \mathbb{R}_+$ beliebig gegeben. Setze $\epsilon = x^{-1}$. Nach Voraussetzung gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{-1} < \epsilon = x^{-1}$. Folglich gilt $x < n$.

Damit sind erstens die Gültigkeit der Aussage (1) und zweitens die Äquivalenz der Aussagen (1), (2), (3) bewiesen □

Mit Hilfe der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 können wir das Infimum der Menge $\mathbb{N}^{-1}$ berechnen.

Satz 1.38. *Es gilt* $\inf(\mathbb{N}^{-1}) = 0$.

Beweis. Jede reelle Zahl $x \leq 0$ ist eine untere Schranke von $\mathbb{N}^{-1}$. Daher genügt der Nachweis der Aussage

$$\neg\left((\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\forall n \in \mathbb{N}) :\ \epsilon \leq n^{-1}\right).$$

Diese Aussage ist offenbar äquivalent zu Aussage (3) des Satzes 1.37. □

Satz 1.39. *Es gelten:*

(1) $(\forall a \in \mathbb{R}_{>1})(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) :\ a^n > x\,.$

(2) $(\forall a \in (0,1))(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) :\ 0 < a^n < \epsilon\,.$

Beweis. Nachweis von (1). Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$ beliebig gegeben. Wir setzen

$$\epsilon = a - 1 > 0\,.$$

Nach der Bernoulli'schen Ungleichung 1.22 gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N}) :\ a^n = (1+\epsilon)^n \geq 1 + n\epsilon > n\epsilon\,.$$

Mit der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 (2) folgt

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) :\ a^n > n\epsilon > x\,.$$

Also gilt Aussage (1).

Nachweis von (2). Seien $a \in (0,1)$ und $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Aus (1) folgt

$$(\exists n \in \mathbb{N}) :\ a^{-n} > \epsilon^{-1}\,.$$

Also gilt (2). Der Beweis des Satzes ist damit beendet. □

Der Wohlordnungsatz 1.29 und die archimedische Ordnungseigenschaft 1.37 besitzen zwei wichtige Konsequenzen, die es ermöglichen, die Deckenfunktion $\lceil\,.\,\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ und die Flurfunktion $\lfloor\,.\,\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ zu definieren.

Satz 1.40.

(1) *Jede nicht-leere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{Z}$, die nach unten beschränkt ist, enthält ein kleinstes Element.*

(2) *Jede nicht-leere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{Z}$, die nach oben beschränkt ist, enthält ein größtes Element.*

Beweis. Es genügt, Aussage (1) zu beweisen. Sei $T \subseteq \mathbb{Z}$ eine nicht-leere Teilmenge, die durch $b \in \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist. Wegen der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 gibt es eine natürliche Zahl $n_b \in \mathbb{N}$ mit $-n_b < b$. Wir verschieben T um n_b nach rechts und erhalten

$$\emptyset \neq n_b + T = \{k \in \mathbb{Z} \mid (\exists t \in T):\ k = n_b + t\} \subseteq \mathbb{N}\,.$$

Nach dem Wohlordnungssatz 1.29 enthält $n_p + T$ ein kleinstes Element. Also enthält auch die Menge T ein kleinstes Element. □

Satz und Definition 1.41 (Decken- und Flurfunktion)**.**

(1) *Die Funktion* $\lceil\,.\,\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *mit*

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$$

heißt die Deckenfunktion. *Die ganze Zahl* $\lceil x \rceil$ *heißt die* Decke der reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$. *Die Deckenfunktion rundet auf.*

(2) *Die Funktion* $\lfloor\,.\,\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *mit*

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

heißt die Flurfunktion. *Die ganze Zahl* $\lfloor x \rfloor$ *heißt der* Flur der reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$. *Die Flurfunktion rundet ab. Oft heißt* $\lfloor x \rfloor$ *der* ganze Teil *oder die* Gauß-Klammer $[x]$ *von* x.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil\,.$

(4) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ \lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}\,.$

(5) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ \lceil x \rceil = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}\,.$

(6) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbb{Z}\,, \\ 1\,, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Dabei ist $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$ *die charakteristische Funktion der Teilmenge* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

(7) $\lfloor\,.\,\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *und* $\lceil\,.\,\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *sind auf* $\mathbb{R}$ *monoton wachsend.*

(8) $\lfloor\,.\,\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *und* $\lceil\,.\,\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *sind auf* $(k, k+1)$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *konstant.*

Beispiel 1.42. Seien a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ gegeben. Nach dem Divisionssatz 1.30 von Euklid gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen q und r mit

$$a = b \cdot q + r\,, \quad 0 \leq r < |b|\,.$$

Es gelten

$$q = \operatorname{sgn}(b) \cdot \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor\,, \quad r = a - |b| \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor\,.$$

Die ganze Zahl r ist der kleinste nicht-negative Rest bei der Division von a durch b. Wir notieren vier Beispiele.

$$\begin{aligned} 23 &= 5 \cdot 4 + 3\,, \\ 23 &= (-5) \cdot (-4) + 3\,, \\ -23 &= 5 \cdot (-5) + 2\,, \\ -23 &= (-5) \cdot 5 + 2\,. \end{aligned}$$

Es gibt viele Paar (q', r') ganzer Zahlen mit $a = bq' + r'$. Ein solches Paar wird erst durch weitere Bedingungen eindeutig festgelegt. Das kann auf mehrere Weisen geschehen. Nach Satz 1.30 reicht es, zu verlangen, dass r' eine ganze Zahl mit $0 \leq r' < |b|$ ist. □

Aus dem Wohlordungssatz 1.29 und der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 folgt, dass $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ *dicht* liegt. Wir erinnern noch einmal daran, dass zum Beweis von Satz 1.37 das Supremumsaxiom 1.34 benötigt wird.

Satz 1.43 ($\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$)**.** *Für alle reellen Zahlen x und y mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl r mit $x < r < y$. Wir sagen dafür, dass die rationalen Zahlen in den reellen Zahlen* dicht *liegen.*

Beweis. Die Aussage, dass die rationalen Zahlen in den reellen Zahlen dicht liegen, ist äquivalent zu

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists r_{x,\epsilon} \in \mathbb{Q}) : \; x < r_{x,\epsilon} < x + \epsilon\,.$$

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Satz 1.37 (3) gilt

$$(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}) : \; 0 < \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon\,.$$

Wir wenden Satz 1.41 an und setzen

$$m_{x,\epsilon} = \begin{cases} \lceil n_\epsilon x \rceil\,, & n_\epsilon x \notin \mathbb{Z}\,, \\ \lceil n_\epsilon x \rceil + 1\,, & n_\epsilon x \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Nach Definition ist $m_{x,\epsilon}$ die kleinste ganze Zahl k mit $n_\epsilon x < k$. Also gilt die Einschließung

$$x < \frac{m_{x,\epsilon}}{n_\epsilon} = \frac{m_{x,\epsilon} - 1}{n_\epsilon} + \frac{1}{n_\epsilon} < x + \epsilon\,.$$

Wir setzen

$$r_{x,\epsilon} = \frac{m_{x,\epsilon}}{n_\epsilon} \in \mathbb{Q}\,.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Nach Satz 1.36 ist $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt. Folglich ist $-\mathbb{N}$ nach unten unbeschränkt ist. Daher sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nach unten und oben unbeschränkt.

Definition 1.44. *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ heißt* beschränkt*, wenn sie nach unten und oben beschränkt ist. Andernfalls heißt S* unbeschränkt*.*

Beispiele 1.45.

(1) Jede Teilmenge einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist beschränkt.

(2) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist beschränkt.

(3) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann sind die Intervalle

$$(a,b)\,, \quad [a,b)\,, \quad (a,b]\,, \quad [a,b]$$

beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Jede Teilmenge von $[a,b]$ ist beschränkt. Siehe Satz 1.46.

(4) Es gilt $\mathbb{N}^{-1} \subseteq (0,1]$. Also ist $\mathbb{N}^{-1}$ beschränkt. Siehe Beispiele 1.26.

(5) Es $W_2 \subseteq [0,2]$. Also ist die Menge W_2 beschränkt. Siehe Beispiele 1.26.

(6) Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind unbeschränkt.

(7) Die Menge $2\mathbb{Z}$ der geraden ganzen Zahlen ist unbeschränkt.

(8) Die Menge $1 + 2\mathbb{Z}$ der ungeraden ganzen Zahlen ist unbeschränkt. □

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Beschränktheit einer Menge reeller Zahlen kann mit Hilfe der Betragsfunktion formuliert werden.

Satz 1.46.

(1) *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn*

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\forall s \in S): \ |s| \leq r$$

erfüllt ist.

(2) *Seien A, $B \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen. Dann sind*

$$|A| = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in A)\colon x = |a|\}\,,$$

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\colon x = a + b\}\,,$$

$$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\colon x = a - b\}\,,$$

$$A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\colon x = ab\}$$

ebenfalls nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(3) *Seien A, $B \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere beschränkte Teilmengen. Dann sind*

$$A \cap B\,, \quad A \cup B\,, \quad A \setminus B\,, \quad |A|\,, \quad A + B\,, \quad A - B\,, \quad A \cdot B$$

beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Beispiele 1.47.

(1) $[0,2] + [-3,4] = [-3,6]$.

(2) $[0,2] - [-3,4] = [-4,5]$.

(3) $[0,2] \cdot [-3,4] = [-6,8]$.

(4) $[-3,4] \setminus [0,2] = [-3,0) \cup (2,4]$. $\square$

Aus 1.34 und 1.35 ergibt sich der Satz 1.48 über die Existenz von Infimum und Supremum einer nicht-leeren Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Satz 1.48. *Jede nicht-leere beschränkte Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ besitzt Infimum und Supremum. Es gilt* $\inf(S) \leq \sup(S)$.

Zur Bestimmung von Infimum und Supremum werden oft die entsprechenden ϵ-Kriterien herangezogen. Siehe 1.51 und 1.49. In Beispiel 1.50 geben wir eine einfache Anwendung.

Satz 1.49 (ϵ-Kriterium für Suprema)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge. Eine obere Schranke x_0 von S ist genau dann das Supremum von S, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists x \in S)\colon x_0 < x + \epsilon$$

erfüllt ist. Den Äquivalenzbeweis führen wir nach dem folgenden Schema.

$$\begin{array}{l} \vdash\ A \Rightarrow B\,. \\ \vdash\ \neg A \Rightarrow \neg B\,. \\ \hline \vdash\ A \Leftrightarrow B\,. \end{array}$$

Dabei verwenden wir die üblichen Regeln zur Klammerersparnis. Das Behauptungszeichen $\vdash$ und der rechte Punkt schließen die Aussage ein. Das Negationszeichen $\neg$ bindet stärker als das Implikationszeichen $\Rightarrow$.

Beweis. Wir nehmen an, dass x_0 eine obere Schranke von S mit $x_0 = \sup(S)$ ist. Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gilt

$$x_0 - \epsilon < x_0 \,.$$

Folglich kann $x_0 - \epsilon$ keine obere Schranke von S sein. Also gilt

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists x \in S) : x_0 - \epsilon < x \,.$$

Nun nehmen wir an, dass x_0 eine obere Schranke von S mit $x_0 \neq \sup(S)$ ist. Dann gilt

$$\epsilon = x_0 - \sup(S) > 0 \,.$$

Wir erhalten

$$(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in S) : x \leq \sup(S) = x_0 - \epsilon \,.$$

Dies ist gleichwertig zur Negation der Bedingung

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists x \in S) : x_0 < x + \epsilon \,.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Beispiel 1.50. Sei $S = [0, 1)$. Es gelten

$$S \neq \emptyset \,, \quad \inf(S) = \min(S) = 0 \,, \quad \sup(S) = 1 \,.$$

Aber S besitzt *kein* größtes Element. Wir rechnen mit dem ϵ-Kriterium 1.49 nach, dass $\sup(S) = 1$ gilt. Für $0 < \epsilon \leq 1$ setzen wir $x_\epsilon = 1 - \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt $x_\epsilon \in [0, 1)$ mit

$$1 = x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2} < x_\epsilon + \epsilon \,.$$

Für $\epsilon > 1$ setzen wir $x_\epsilon = 0$. Dann gilt $x_\epsilon \in [0, 1)$ mit

$$1 = 0 + 1 < x_\epsilon + \epsilon \,.$$

Also ist 1 das Supremum von S. □

Satz 1.51 (ϵ-Kriterium für Infima)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge. Eine untere Schranke x_0 von S ist genau dann das Infimum von S, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists x \in S) \colon x - \epsilon < x_0$$

erfüllt ist.

Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ergibt. Das Supremumsaxiom 1.34 garantiert die Existenz positiver Quadratwurzeln im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Satz 1.52. *Es gilt*

$$(\forall r \in \mathbb{Q}) : r^2 \neq 2 .$$

Beweis. Wir nehmen an, dass zwei teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p^2 = 2q^2$ existieren. Aus $p^2 = 2q^2$ folgt, dass p gerade ist. Folglich ist auch q gerade. Dies ist ein Widerspruch. □

Satz und Definition 1.53 (Existenz von Quadratwurzeln)**.** *Es gelten die folgenden Aussagen und Bezeichnungen:*

(1) $(\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0})(\exists! w \in \mathbb{R}_{\geq 0}) : a = w^2 .$

(2) *Sei $a \geq 0$. Die eindeutige bestimmte Zahl $w \geq 0$ mit $w^2 = a$ heißt die* nicht-negative Quadratwurzel *von a und wird mit*

$$w = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{1/2}$$

bezeichnet.

(3) $\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{1} = 1.$

(4) $(\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0}) : (-\sqrt{a})^2 = a .$

(5) $(\forall a \in \mathbb{R}_{+}) : \sqrt{a} \in \mathbb{R}_{+} .$

(6) *Sei $a > 0$. Dann heißt die positive Zahl $\sqrt{a}$ die* positive Quadratwurzel *von a und die negative Zahl $-\sqrt{a}$ die* negative Quadratwurzel *von a.*

(7) *Sei $a > 0$. Dann gilt*

$$\sqrt{a} = \sup\{s \in \mathbb{R}_{+} \mid s^2 \leq a\} .$$

(8) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = |x| .$

Beweis. Nachweis von (1). *Zuerst betrachten wir den Fall $a = 0$.* Es gilt

$$0 \cdot 0 = 0 .$$

Sei $w \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $w \neq 0$ und $w^2 = 0$. Dann folgt der Widerspruch

$$w = 1 \cdot w = (w^{-1} \cdot w) \cdot w = w^{-1} \cdot w^2 = w^{-1} \cdot 0 = 0 .$$

Also ist $w = 0$ die einzige reelle Zahl mit $w^2 = 0$.

Sei $a > 0$. Die Menge

$$S = \{s \in \mathbb{R}_{+} \mid s^2 \leq a\}$$

besitzt die beiden folgenden Eigenschaft (i) und (ii).

(i) $a(1 + a)^{-1} \in S .$

(ii) $(\forall s \in S) : s \leq 1 + a .$

Nachweis von (i) *und* (ii). Wegen $a > 0$ erhalten wir

$$\frac{a^2}{(1+a)^2} = \frac{a^2}{1+2a+a^2} < \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2} < a\,.$$

Also gilt (i). Für $s \in S$ gelten

$$0 < s\,, \quad s^2 \le a\,, \quad 0 < s \le \max\{1, s^2\} \le 1 + a\,.$$

Also gilt auch (ii). *Damit sind* (i) *und* (ii) *bewiesen.*

Weil die Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer und nach oben beschränkt ist, liefert das Supremumsaxiom 1.34 die Aussage

$$(\exists w \in \mathbb{R}) : w = \sup(S)\,.$$

Wir beweisen, dass die reelle Zahl w die Eigenschaften (iii)*,* (iv)*,* (v) *besitzt.*

(iii) $w \in \mathbb{R}_+$.

(iv) $\neg\,(w^2 < a)$.

(v) $\neg\,(w^2 > a)$.

Aus der Trichotomie 1.4 folgt dann

(vi) $w^2 = a$.

Damit ist schließlich die Existenzaussage von (1) *bewiesen.*

Die Aussage (iii) *gilt,* weil w eine obere Schranke von S ist. Zum Nachweis von (iv) und (v) zeigen wir, dass die Aussagen $w^2 < a$ und $w^2 > a$ auf einen Widerspruch führen.

Nachweis von (iv). *Annahme, es gilt $w^2 < a$.* Wir setzen

$$b = \frac{1}{2} \cdot \min\left\{w, \frac{a - w^2}{3w}\right\}\,.$$

Dann gelten die Ungleichungen

$$0 < b\,, \quad b < w\,, \quad b < \frac{a - w^2}{3w}\,.$$

Wir quadrieren $w + b \in \mathbb{R}_+$ und erhalten

$$(w+b)^2 = w^2 + (2w+b)b < w^2 + 3wb < w^2 + (a - w^2) = a\,.$$

Also gilt $w + b \in S$. Damit erhalten wir den Widerspruch

$$w < w + b \le \sup(S) = w\,.$$

Nachweis von (v). *Annahme, es gilt $w^2 > a$.* Wir betrachten die reelle Zahl

$$c = w - \frac{w^2 - a}{2w} = \frac{2w^2 - (w^2 - a)}{2w} = \frac{1}{2}\left(w + \frac{a}{w}\right) \in (0, w)\,.$$

Quadrieren ergibt

$$c^2 = w^2 - (w^2 - a) + \frac{(w^2 - a)^2}{4w^2} = a + \frac{(w^2 - a)^2}{4w^2} > a\,.$$

Folglich gilt

$$(\forall s \in S) : 0 < s^2 \le a < c^2\,.$$

Mit 1.21 folgt $s < c$ für alle $s \in S$. Also ist c eine obere Schranke von S. Nun folgt der Widerspruch

$$w = \sup(S) \le c < w\,.$$

Damit sind beiden Behauptungen (iv) *und* (v) *bewiesen. Also gilt*

$$w^2 = a\,.$$

Wir zeigen die Einzigkeit. Sei $v \in \mathbb{R}_+$ mit $v^2 = a$ beliebig gegeben. Wegen

$$(w - v)(w + v) = w^2 - v^2 = a^2 - a^2 = 0$$

gilt $w = v$. Dabei verwenden wir $w + v \in \mathbb{R}_+$. Damit ist auch die Einzigkeit von $w > 0$ mit $w^2 = a$ bewiesen. *Der Nachweis von* (1) *ist damit erbracht.*

Die Aussagen (3), (4), (5), (7), (8) folgen nun aus (1). Die Bezeichnungen in (2) und (6) sind durch die vorhergehenden Aussagen gerechtfertigt. □

Ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung von positiven Quadratwurzeln liefert das *Heron-Verfahren* aus Beispiel 2.17.

Satz und Definition 1.54 (Existenz von n-ten Wurzeln)**.** *Es gelten die folgenden Aussagen und Bezeichnungen:*

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{R}_{\ge 0})(\exists! w \in \mathbb{R}_{\ge 0}) : \ a = w^n\,.$

(2) *Seien $a \ge 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Die eindeutige bestimmte Zahl $w \ge 0$ mit $w^n = a$ heißt die* nicht-negative n-te Wurzel *von a und wird mit*

$$w = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{1/n}$$

bezeichnet. Es gilt

$$\sqrt[n]{a} = \sup\{s \in \mathbb{R}_+ \mid s^n \le a\}\,.$$

(3) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ \sqrt[n]{0} = 0, \ \sqrt[n]{1} = 1.$

(4) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{R}_+) : \ \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}_+\,.$

(5) *Seien $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die eindeutig bestimmte positive Zahl $\sqrt[n]{a}$ die* positive n-te Wurzel *von a.*

Ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung von positiven n-ten Wurzeln stellen wir in Beispiel 2.18 vor. Es ist eine Variation des Heron-Verfahrens.

Die positiven n-ten Wurzeln spielen in der Definition des Logarithmus eine wichtige Rolle. Wir behandeln dies ausführlich in Satz und Definition 3.1. Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)\,.$$

Der Logarithmus stellt einen Zusammenhang zwischen der Multiplikation und der Addition her.

2 Reelle Zahlenfolgen

Definition 2.1. *Eine Funktion* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *heißt eine* reelle Zahlenfolge *oder* Folge. *Wir setzen dann* $a_n = a(n)$ *und schreiben*

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n) = (a_1, a_2, \ldots) = a_1, a_2, \ldots .$$

Die reellen Zahlen a_n *heißen* Glieder *der Folge* (a_n).

Manchmal ist es bequemer, die Indizierung der Glieder einer Folge bei einer ganzen Zahl n_0 beginnen zu lassen. Wir schreiben dann sinngemäß

$$(a_n)_{n\geq n_0} = a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots .$$

Durch eine Indexverschiebung kann die Standardform in jedem Fall wieder erreicht werden:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = b_1, b_2, b_3, \ldots , \quad b_n = a_{n_0+n-1} .$$

Definition 2.2. *Sei* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge. Sei* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine streng monoton wachsende Funktion. Die Folge* $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$b = a \circ \varphi , \quad b_n = a_{\varphi(n)} = a(\varphi(n))$$

heißt eine Teilfolge *von* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Vereinfachend schreiben wir*

$$n_k = \varphi(k) , \quad b_k = a_{n_k} = a_{\varphi(k)} , \quad b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} .$$

Definition 2.3.

(1) *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* konvergent, *wenn die Bedingung*

$$(\exists\alpha \in \mathbb{R})(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : \, |a_n - \alpha| \leq \epsilon$$

erfüllt ist. In diesem Fall heißt α Grenzwert *oder* Limes *von* (a_n). *Wir sagen dann, dass* (a_n) gegen α konvergiert.

(2) *Eine Folge, die gegen* 0 *konvergiert heißt* Nullfolge.

(3) *Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt* divergent. *Im Falle der Divergenz existiert* kein *Grenzwert.*

Beispiel 2.4. *Die Folge*

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots$$

ist eine Nullfolge. Die archimedische Ordnungseigenschaft 1.37 (3) ergibt

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : \, \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \left|\frac{1}{N}\right| \leq \epsilon .$$

Dieses Beispiel spiegelt den Aufbau der reellen Zahlen wider. □

Satz 2.5. *Eine konvergente Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *besitzt genau einen Grenzwert.*

Beweis. Seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ Grenzwerte von (a_n). Dann gelten

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_1) : |a_n - \alpha| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_2) : |a_n - \beta| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir setzen

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Für alle $n \geq N$ folgt mit Hilfe der Dreiecks-Ungleichung und Symmetrie des Betrages

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \\ &\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| \\ &= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(\forall \epsilon > 0) : |\alpha - \beta| \leq \epsilon.$$

Damit folgt $\alpha = \beta$. Der Beweis ist damit beendet. □

Satz 2.6. *Wenn eine Folge* (a_n) *gegen* α *konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge von* (a_n) *ebenfalls gegen* α*.*

Beweis. Sei $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{\varphi(n)}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es gilt $\varphi(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen diese Aussage mit vollständiger Induktion. Weil 1 die kleinste natürliche Zahl ist, gilt $1 \leq \varphi(1)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) \geq n$ gegeben. Weil φ streng monoton wachsend ist, gilt

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n.$$

Also folgt $\varphi(n+1) \geq n+1$. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Aussage des Satzes zu. Nach Voraussetzung konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen α. Daher gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\epsilon) : \; |a_n - \alpha| \leq \epsilon.$$

Weil φ streng monoton wachsend ist, gilt

$$(\forall n \geq N_\epsilon) : \; N_\epsilon \leq n \leq \varphi(n).$$

Es folgt

$$(\forall n \geq N_\epsilon) : \; |b_n - \alpha| = |a_{\varphi(n)} - \alpha| \leq \epsilon.$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet. □

Beispiel 2.7 (Fortsetzung von Beispiel 2.4)**.** Die Folge

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{9} \ldots$$

ist eine Nullfolge, denn sie ist eine Teilfolge der Nullfolge $(\frac{1}{n})$. □

Schreibweisen 2.8.

(1) *Wenn die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* α *konvergiert, schreiben wir*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\,, \quad \lim a_n = \alpha\,, \quad a_n \to \alpha \quad (n\to\infty)\,, \quad a_n \to \alpha\,.$$

(2) *Sei* $N \in \mathbb{N}$*. Für die Konvergenz der Teilfolge, die von allen Gliedern* a_n *mit* $n \geq N$ *gebildet wird, verwenden wir die Schreibweisen*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq N}} a_n = \alpha\,, \quad \lim a_n = \alpha\,, \quad a_n \to \alpha \quad (n\geq N,\, n\to\infty)\,, \quad a_n \to \alpha\,.$$

(3) *Weil das Konvergenzverhalten nicht von den endlichen Anfängen einer Folge abhängt, lassen wir den Zusatz* $n \geq N$ *oft fort.*

(4) *Insbesondere machen wir von* (3) *Gebrauch, wenn die betrachteten Folgeglieder* a_n *aus den Gliedern anderer Folgen durch Konstruktionen gewonnen werden, die nur für alle hinreichend großen Indizes* n *einen Sinn machen. Siehe Definition* 2.9 *und Aussage* (4) *in Satz* 2.10*.*

Definition 2.9. *Wenn es* $N \in \mathbb{N}$ *derart gibt, dass eine Aussage* $A(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq N$ *gilt, dann sagen wir, dass* $A(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*.*

Satz 2.10 (Grenzwertkalkül)**.** *Seien* (a_n) *und* (b_n) *Folgen mit* $a_n \to \alpha$ *und* $(b_n) \to \beta$*. Dann gelten:*

(1) $|a_n| \to |\alpha|$.

(2) $a_n + b_n \to \alpha + \beta$.

(3) $a_n \cdot b_n \to \alpha \cdot \beta$.

(4) *Sei* $\beta \neq 0$*. Dann gilt* $b_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$*. Es gibt also ein* $N' \in \mathbb{N}$ *mit* $b_n \neq 0$ *für* $n \geq N'$*. Es gilt*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\alpha}{\beta} \quad (n \geq N'\,,\; n\to\infty)\,.$$

(5) *Es gelte* $a_n \leq b_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gilt* $\alpha \leq \beta$*.*

Beweis. Nachweis von (1). Nach der Dreiecks-Ungleichung gilt

$$||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha| \, .$$

Also folgt $|a_n| \to |\alpha|$.

Nachweis von (2). Es gelten

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_1) : \, |a_n - \alpha| \leq \frac{\epsilon}{2} \, ,$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_2) : \, |b_n - \beta| \leq \frac{\epsilon}{2} \, .$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir setzen

$$N = \max\{N_1, N_2\} \, .$$

Mit Hilfe der Dreiecks-Ungleichung folgt

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \, .$$

Also gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_2) : \, |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \epsilon \, .$$

Damit ist $a_n + b_n \to \alpha + \beta$ bewiesen.

Nachweis von (3). Sei $\epsilon > 0$ gewählt. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall n \geq N) : \quad |a_n - a| \leq \min \left\{ \frac{\epsilon}{2|\beta| + 2}, 1 \right\} \, , \quad |b_n - \beta| \leq \frac{\epsilon}{2|\alpha| + 2} \, .$$

Aus der ersten Ungleichung und der Dreiecks-Ungleichung folgt

$$(\forall n \geq N) : \, |a_n| \leq |\alpha| + |a_n - \alpha| \leq |\alpha| + 1 \, .$$

Für alle $n \geq N$ folgt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \\ &\leq |a_n| \cdot |(b_n - \beta)| + |\beta| \cdot |(a_n - \alpha)| \\ &\leq (|\alpha| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|\alpha| + 2} + |\beta| \cdot \frac{\epsilon}{2|\beta| + 2} = \epsilon \, . \end{aligned}$$

Damit ist $a_n b_n \to \alpha\beta$ bewiesen.

Nachweis von (4). Sei $\eta = |\beta|/2 > 0$. Wegen der Konvergenz gilt

$$(\exists N' \in \mathbb{N})(\forall n \geq N') : \, |b_n - \beta| \leq \eta = \frac{|\beta|}{2} \, .$$

Mit Hilfe der Dreiecks-Ungleichung ergibt sich

$$(\forall n \geq N') : \, |b_n| \geq |\beta| - |b_n - \beta| \geq |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2} > 0 \, .$$

Aus der Konvergenz folgt außerdem

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \geq N')(\forall n \geq N) : \, |b_n - \beta| \leq \frac{\epsilon \, |\beta|^2}{2} \, .$$

Für alle $n \geq N$ erhalten wir

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n| \, |\beta|} \leq \frac{2}{|\beta|} \cdot \frac{\epsilon \, |\beta|^2}{2} \cdot \frac{1}{|\beta|} = \epsilon \, .$$

Also gilt

$$(\exists N' \in \mathbb{N}) : \, \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{\beta} \quad (n \geq N' \, , \; n \to \infty) \, .$$

Nun folgt (4) aus (3).

Nachweis von (5). Nach Voraussetzung gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : \, \alpha - \epsilon \leq a_n \leq b_n \leq \beta + \epsilon \, .$$

Für die Grenzwerte α und β der beiden Folgen ergibt sich

$$(\forall \epsilon > 0) : \, \alpha - \beta \leq 2\epsilon \, .$$

Es folgt $\alpha - \beta \leq 0$. Also gilt $\alpha \leq \beta$. Der Beweis des Satzes ist damit beendet. □

Satz 2.11 (Einschließungsregel)**.** *Sei (c_n) eine Folge, zu der konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit den beiden Eigenschaften* (1) *und* (2) *existieren.*

(1) *Es gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*

(2) *Es gibt $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to \gamma$ und $b_n \to \gamma$.*

Dann ist (c_n) konvergent mit $c_n \to \gamma$.

Beweis. Aus der Konvergenz der Folgen (a_n) und (b_n) folgt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : \quad |a_n - \gamma| \leq \frac{\epsilon}{2} \, , \quad |b_n - \gamma| \leq \frac{\epsilon}{2} \, .$$

Zu $\epsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ gewählt. Für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - b_n| \leq |a_n - \gamma| + |\gamma - b_n| \leq \epsilon \, .$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} 2 \, |c_n - \gamma| &= |c_n - \gamma| + |c_n - \gamma| \\ &\leq |c_n - a_n| + |a_n - \gamma| + |c_n - b_n| + |b_n - \gamma| \\ &\leq (c_n - a_n) + (b_n - c_n) + \epsilon \\ &\leq |b_n - a_n| + \epsilon = 2\epsilon \, . \end{aligned}$$

Also gilt $c_n \to \gamma$. □

Beispiele 2.12. Es gelten:

(1) $(\forall s \in \mathbb{Q}_+) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0.$

(2) $(\forall a \in \mathbb{R}_+) : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

(3) $(\forall s \in \mathbb{Q}_+) : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^s} = 1.$

(4) $(\forall a \in \mathbb{R},\, |a| < 1) : \lim_{n\to\infty} a^n = 0.$

(5) $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{R},\, |a| > 1) : \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$

(6) $(\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\, a \leq b) : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$

Beweis. Nachweis von (1). Für $\epsilon > 0$ wählen wir nach der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 (3) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \epsilon^{-1/s}$. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{n^s} - 0\right| \leq \left|\frac{1}{N^s}\right| \leq \epsilon\,.$$

Folglich gilt $n^{-s} \to 0$.

Nachweis von (2). Wir nehmen zuerst an, dass $a \geq 1$ gilt. Wir setzen

$$a_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0\,.$$

Die Bernoulli'sche Ungleichung 1.22 ergibt

$$a = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \geq na_n\,.$$

Für $\epsilon > 0$ wählen wir nach der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 (3) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq a/\epsilon$. Dann gilt

$$(\forall n \geq N) : |\sqrt[n]{a} - 1| = a_n \leq \frac{a}{n} \leq \epsilon\,.$$

Folglich gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$ im Fall $a \geq 1$. Nun nehmen wir an, dass $0 < a < 1$ gilt. Dann gilt $1/a > 1$. Mit Satz 2.10 (4) folgt

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to \frac{1}{1} = 1\,.$$

Also gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$ für alle $a \in \mathbb{R}_+$.

Nachweis von (3). Zuerst betrachten wir den Fall $s = 1$. Wir setzen

$$a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0\,.$$

Aus dem Binomialsatz 1.23 folgt

$$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2\,, \quad n - 1 \geq \frac{(n-1)n}{2}\, a_n^2\,, \quad a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}\,.$$

Für $\epsilon > 0$ wählen wir nach der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 (3) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2/\epsilon^2$. Dann gilt

$$(\forall n \geq N) : |\sqrt[n]{n} - 1| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \epsilon\,.$$

Also gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$. Aus Satz 2.10 (3) folgt

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \; : \sqrt[n]{n^p} = \sqrt[n]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{n} \to 1 \cdot \ldots \cdot 1 \to 1\,.$$

Nun sei $s \in \mathbb{Q}_+$ gegeben. Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $s \leq p$ gewählt. Dann gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{n^s} \leq \sqrt[n]{n^p}\,.$$

Mit Einschließungssatz 2.11 folgt $\sqrt[n]{n^s} \to 1$.

Nachweis von (4). Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$ gegeben. Zu $\epsilon > 0$ gibt es nach Satz 1.39 ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a|^N \leq \epsilon$. Es folgt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : |a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^N \leq \epsilon\,.$$

Also gilt $a^n \to 0$.

Nachweis von (5). Seien $x \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{N}$ mit

$$x = |a| - 1 > 0\,, \quad p > k$$

gewählt. Es gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2p) : n - p + 1 \geq \frac{n}{2} + 1 > \frac{n}{2}\,.$$

Nach dem Binomialsatz 1.23 gilt daher

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2p) : \quad (1+x)^n &> \binom{n}{p} x^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}\, x^p \\ &= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p!}\, x^p \\ &> \left(\frac{n}{2}\right)^p \frac{x^p}{p!} = \frac{n^p x^p}{2^p p!}\,.\end{aligned}$$

Es folgt

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2p) : \quad \left|\frac{n^k}{a^n}\right| = \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^p p!}{x^p n^{p-k}} < \frac{2^p p!}{x^p} \cdot \frac{1}{n}$$

Für $\epsilon > 0$ setze

$$N = \max\left\{\frac{2^p p!}{x^p} \cdot \frac{1}{\epsilon}, 2p\right\}\,.$$

Damit erhalten wir

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : \quad n \geq 2p\,, \quad \frac{2^p p!}{x^p} \cdot \frac{1}{n} \leq \epsilon\,, \quad \left|\frac{n^k}{a^n}\right| < \epsilon\,.$$

Also gilt $n^k/a^n \to 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $|a| > 1$.

Nachweis von (6). Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ mit $a < b$ gilt

$$b = \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{b^n + b^n} \leq b\sqrt[n]{2}\,.$$

Aus der Einschließungsregel 2.11 und (2) aus 2.12 folgt $\sqrt[n]{a^n + b^n} \to b$. □

Satz und Definition 2.13.

(1) *Eine reelle Folge* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* beschränkt *wenn die Menge*

$$a(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) : x = a_n\}$$

der Folgeglieder a_n *beschränkt ist.*

(2) *Eine reelle Folge* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann beschränkt, wenn*

$$(\exists \gamma \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : |a_n| \leq \gamma$$

gilt.

Satz 2.14. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Reelle Folgen sind nach Definition Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Daher können wir die Begriffe *monoton wachsend*, *streng monoton wachsend*, *monoton fallend* respektive *streng monoton fallend* aus Definition 1.9 auf reelle Folgen anwenden. Beispielsweise ist eine reelle Folge (a_n) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt.

Beispiele 2.15.

(1) Die Nullfolge $(n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend und beschränkt.

(2) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt. Sie besitzt keinen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Satz 2.16. *Es gelten:*

(1) *Jede beschränkte monoton wachsende Folge* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen das Supremum der Menge* $a(\mathbb{N})$. *Es gilt also:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n) = \sup(a(\mathbb{N}))\,.$$

(2) *Jede beschränkte monoton fallende Folge* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen das Infimum der Menge* $a(\mathbb{N})$. *Es gilt also:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n) = \inf(a(\mathbb{N}))\,.$$

(3) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Beweis. Nachweis von (1). Die Folge $a = (a_n)$ sei monoton wachsend und beschränkt. Nach dem Supremumsaxion 1.34 existiert $s = \sup(a(\mathbb{N}))$. Nach dem ϵ-Kriterium 1.49 gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}) : \; s < a_{N_\epsilon} + \epsilon\,.$$

Weil (a_n) monoton wächst, folgt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\epsilon) : \; |a_n - s| = s - a_n \leq s - a_{N_\epsilon} < \epsilon\,.$$

Also gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to s$. Damit ist (1) bewiesen. Der Nachweis von (2) folgt analog. Aussage (3) folgt aus (1) und (2). □

Beispiel 2.17 (Babylonisches Wurzelziehen, Verfahren von Heron)**.** Sei $a > 0$ gegeben. Für jedes $x_0 > 0$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ monoton fallend gegen $\sqrt{a}$. Siehe Beispiel 16.1.

Beispiel 2.18 (Positive k-te Wurzel)**.** Seien $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Für jedes $x_0 > 0$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ monoton fallend gegen die positive k-te Wurzel $\sqrt[k]{a}$ von a.

Beispiel 2.19 (Euler'sche Zahl)**.** Die Folge (x_n) mit

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton wachsend. Der Grenzwert heißt *Euler'sche Zahl* e. Es gilt also

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten die Abschätzungen

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Die rechte Folge konvergiert monoton fallend gegen e. Für $n = 1$ erhalten wir $x \in [2, 4]$.

Ehe wir weitere Beispiele behandeln, führen wir den Begriff der *asymptotischen Gleichheit* zweier reeller Folgen ein.

Definition 2.20. *Zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ heißen* asymptotisch gleich*, wenn die Bedingung*

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1$$

erfüllt ist. Wir verwenden dafür die Schreibweisen

$$a_n \sim b_n \quad (n \to \infty)\,, \quad a_n \sim b_n\,.$$

Zwei Folgen können asymptotisch gleich sein, ohne zu konvergieren.

Beispiel 2.21. Aus der Einschließung

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

folgt die asymptotische Gleichheit

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \quad (n \to \infty)\,.$$

Für $n \geq 2$ gilt jeweils das echte Ungleichheitszeichen in der obigen Einschließung für die Fakultät $n!$.

Beispiel 2.22 (Wallis'sches Produkt, Kreiszahl)**.** Sei (a_n) die Folge mit

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt

$$(\exists! x \in \mathbb{R}_+) : \quad a_n \sim \sqrt{xn} \quad (n \to \infty)\,.$$

Die eindeutig bestimmte positive Zahl x wird mit π bezeichnet. Es gilt also

$$a_n \sim \sqrt{\pi n} \quad (n \to \infty)\,.$$

Die positive Zahl $\pi/2$ ist die kleinste positive Nullstelle des Cosinus. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten die Abschätzungen

$$\frac{a_n}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{\pi} < \frac{a_n}{\sqrt{n}}\,,$$

wobei die linke Folge monoton wachsend und die rechte Folge monoton fallend gegen $\sqrt{\pi}$ konvergiert. Für $n = 1$ erhalten wir $\pi \in (2, 4)$.

Beweis. Die Monotonieaussagen folgen aus

$$\frac{a_{n+1}^2}{n+2} : \frac{a_n^2}{n+1} = \frac{(2n+2)^2\,(n+1)}{(2n+1)^2\,(n+2)} = \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4n^3+12n^2+9n+2} > 1\,,$$

$$\frac{a_{n+1}^2}{n+1} : \frac{a_n^2}{n} = \frac{(2n+2)^2\,n}{(2n+1)^2\,(n+1)} = \frac{4(n+1)n}{(2n+1)^2} = \frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1} < 1\,,$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt daher

$$\sqrt{2} = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n+1}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq a_1 = 2\,.$$

Also sind beide monotone Folgen beschränkt und nach Satz 2.16 konvergent. Mit Satz 2.10 (3) folgt

$$0 < \frac{a_n^2}{n} - \frac{a_n^2}{n+1} = \frac{a_n^2}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a_n^2}{n} \to 0\,.$$

Nun liefern der Satz 2.10 (5) und der Einschließungssatz 2.11 die Gleichheit der Grenzwerte beider Folgen. □

Beispiel 2.23 (Stirling'sche Formel)**.** Es gilt

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,.$$

□

Jede konvergente Folge ist nach Satz 2.14 konvergent. Nach Satz 2.16 sind monotone beschränkte Folgen konvergent. Die Beschränktheit einer Folge ist für die Konvergenz nicht hinreichend. Beispielsweise ist eine Folge (a_n) mit $a_{2n-1} = b_n$ und $a_{2n} = c_n$, wobei (b_n) und (c_n) gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren, beschränkt aber nicht konvergent. Die Folge (a_n) besitzt allerdings konvergente Teilfolgen. Siehe Beispiel 2.26.

Satz 2.24 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt

$$(\exists a, b \in \mathbb{R}): \quad a \leq b\,, \quad (x_n) \subseteq [a, b]\,.$$

Fortgesetztes Halbieren des Intervalles $[a, b]$ liefert zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit Eigenschaften (1), (2), (3), (4), (5).

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}):\ a \leq a_n \leq b_n \leq b$.

(2) (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt.

(3) (b_n) ist monoton fallend und beschränkt.

(4) $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$.

(5) Jedes Intervall $[a_n, b_n]$ enthält unendlich viele Glieder der Folge (x_n).

Zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit diesen Eigenschaften lassen sich durch die Schritte (i) und (ii) induktiv definieren.

(i) Wenn das Intervall $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ unendlich viele Glieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält, dann setzen wir

$$a_1 = a\,, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}(a+b)\,.$$

Wenn das Intervavall $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ höchstens endlich viele Glieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält, dann setzen wir

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a+b)\,, \quad b_1 = b\,.$$

(ii) Es seien bereits $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ konstruiert. Dann wenden wir Schritt (i) auf $[a_n, b_n]$ anstelle von $[a, b]$ an.

Mit den Sätz 2.16 und 2.10 folgt

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}): \quad a_n \to \alpha\,, \quad b_n \to \alpha\,.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in [a_1, b_1]\}\,, \\ \varphi(n+1) &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\,,\ \varphi(1), \ldots, \varphi(n) < k\}\,. \end{aligned}$$

Die in der Konstruktion von φ verwendeten Minima existieren aufgrund des Wohlordungssatzes 1.29. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist streng monoton wachsend. Mit der Einschließungsregel 2.11 folgt

$$x_{\varphi(n)} \to \alpha\,.$$

Also ist die Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$ von (x_n) konvergent. □

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzen beschränkte reelle Folgen *Häufungspunkte* im Sinne der folgenden Definition.

Definition 2.25. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt ein* Häufungspunkt *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{\varphi(n)} \to \alpha$ gibt.*

Der Grenzwert ist der einzige Häufungspunkt einer konvergenten Folge. Dagegen können Folgen, die nicht konvergieren, mehrere Häufungspunkte besitzen.

Beispiele 2.26.

(1) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ besitzt die beiden Häufungspunkte ± 1.

(2) Die unbeschränkte Folge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$c = 0, -1, 0, 1, -2, -1, 0, 1, 2, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

besitzt jede ganze Zahl $\nu \in \mathbb{Z}$ als Häufungspunkt. Beispielsweise gilt

$$c_{10} = -3\,.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt auf den endlichen Abschnitt

$$-n, -(n-1), \ldots, 0, \ldots, n-1, n$$

der endliche Abschnitt

$$-(n+1), -n, -(n-1), \ldots, 0, \ldots, n-1, n, n+1\,.$$

Bei der Konstruktion der Folge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ verwenden wir die grundsätzlichen Eigenschaften der unendlichen Menge $\mathbb{N}$ aus dem Satz von Cantor. Siehe Satz 22.10.

(3) Sei $h_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ die Schränkungsfunktion mit

$$h_{\mathbb{R}}(x) = \frac{x}{1 + |x|}\,.$$

Jede rationale Zahl der Form $h_{\mathbb{R}}(\nu)$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ ist ein Häufungspunkt der beschränkten Folge $(h_{\mathbb{R}}(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folge besitzt also abzählbar unendlich viele Häufungspunkte im Intervall $(-1, 1)$.

□

Jede beschränkte Folge besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.24 eine konvergente Teilfolge. Jede *Cauchy-Folge* ist beschränkt. Nach dem *Cauchy-Konvergenzkriterium* 2.28 ist eine reelle Folge genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Das Cauchy-Konvergenzkriterium drückt die wesentliche Eigenschaft der *Vollständigkeit* der reellen Zahlen aus. Es beruht auf dem Satz 2.24 von Bolzano-Weierstraß und damit auf dem Wohlordnungssatz 1.29 und dem Supremumsaxiom 1.34. Das Kriterium 2.28 kann an Stelle von Axiom 1.34 beim Aufbau der reellen Zahlen zu Grunde gelegt werden.

Definition 2.27. *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine* Cauchy-Folge*, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) :\ |a_n - a_m| \leq \epsilon$$

erfüllt ist.

Satz 2.28 (Cauchy-Konvergenzkriterium)**.** *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Sei (a_n) *eine konvergente Folge mit* $a_n \to \alpha$. Dann gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\epsilon) : \; |a_n - \alpha| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \, .$$

Mit der Dreiecks-Ungleichung folgt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| \leq \epsilon$$

für alle n, $m \geq N_\epsilon$. *Also ist* (a_n) *eine Cauchy-Folge.*

Sei (a_n) *eine Cauchy-Folge.* Dann gilt

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) : \; |a_n - a_m| \leq 1 \, .$$

Es folgt

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \; |a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\} \, .$$

Also ist (a_n) *beschränkt.* Nach dem Satz 2.24 von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{\varphi(n)})$ von (a_n). Sei

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_{\varphi(n)} \, .$$

Weil (a_n) eine Cauchy-Folge ist und $(a_{\varphi(n)})$ gegen α konvergiert, gilt

$$\begin{gathered}(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N_\epsilon) : \\ \varphi(n_\epsilon) \geq N_\epsilon \, , \quad |a_n - a_m| \leq \frac{\epsilon}{2} \, , \quad |a_{\varphi(n_\epsilon)} - \alpha| \leq \frac{\epsilon}{2} \, .\end{gathered}$$

Mit der Dreiecks-Ungleichung ergibt sich

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{\varphi(n_\epsilon)}| + |a_{\varphi(n_\epsilon)} - \alpha| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq N_\epsilon$. *Also konvergiert* (a_n) *gegen* α. □

Bei vielen Untersuchungen ist es günstig, die reellen Zahlen um zwei weitere Elemente $+\infty$ und $-\infty$ zu ergänzen, die wir *plus Unendlich* respektive *minus Unendlich* nennen. Die Menge

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

heißt die *erweiterte Zahlengerade*. Die Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ heißen die *erweiterten reellen Zahlen*. Statt $+\infty$ schreiben wir auch ∞. Wir definieren

$$-\infty = \mathbb{R}_- \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \, , \quad \infty = +\infty = \mathbb{R}_+ \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \, .$$

Wir fassen die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$ als Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$ auf. Dabei identifizieren wir jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der entsprechenden einelementigen Menge

$$\{a\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \, .$$

Die Elemente $\pm\infty$ heißen die *unendlich fernen Punkte* der erweiterten Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$. Wir ergänzen die Definitionen 1.3 und 1.10.

Definition 2.29. *Sei $a \in \mathbb{R}$.*

(1) $-\infty < \infty$.

(2) $-\infty < a$.

(3) $a < \infty$.

(4) $(a, \infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq \infty\}$.

(5) $[a, \infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq \infty\}$.

(6) $[-\infty, a) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty \leq x < a\}$.

(7) $[-\infty, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty \leq x \leq a\}$.

(8) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

(9) $[-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

Das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ dient oft als Modell der erweiterten Zahlengerade. Dabei machen wir von der Schränkungsfunktion Gebrauch.

Beispiel 2.30. Die Schränkungsfunktion $h_{\overline{\mathbb{R}}} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ mit

$$h_{\overline{\mathbb{R}}}(x) = \begin{cases} -1\,, & x = -\infty\,, \\ \dfrac{x}{1+|x|}\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ 1\,, & x = +\infty \end{cases}$$

ist bijektiv und streng monoton wachsend. Dabei wird $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(-1, 1)$ abgebildet. Das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ ist in bestimmter Hinsicht ein Modell der erweiterten Zahlengeade. □

Der *Limes superior* und der *Limes inferior* einer beliebigen reelle Folge werden als erweiterte reelle Zahlen definiert. Wenn die Folge beschränkt ist, dann sind Limes superior und Limes inferior reelle Zahlen im gewöhnlichen Sinn. Diese beiden reellen Zahlen sind der größte respektive der kleinste Häufungspunkt der beschränkten Folge.

Satz und Definition 2.31. *Sei $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es sei $H_x \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungpunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

(1) *Es gibt genau ein $b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit* (i) *und* (ii).

  (i) *Für alle $z \in (b, \infty]$ gilt $x_n < z$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*

  (ii) *Für alle $z \in [-\infty, b)$ gilt $z < x_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*

Die eindeutig bestimmte erweiterte reelle Zahl b heißt der Limes superior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Wir schreiben*

$$b = \limsup_{n\to\infty}(x_n)\,, \quad b = \limsup(x_n)\,.$$

(2) *Es gibt genau ein* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *mit* (i) *und* (ii).

(i) *Für alle* $z \in [-\infty, a)$ *gilt* $z < x_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Für alle* $z \in (a, \infty]$ *gilt* $x_n < z$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$.

Die eindeutig bestimmte erweiterte reelle Zahl a heißt der Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Wir schreiben*

$$a = \liminf_{n\to\infty}(x_n)\,, \quad a = \liminf(x_n)\,.$$

(3) *Für alle* $\xi \in H_x$ *gilt*

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n) \le \xi \le \limsup_{n\to\infty}(x_n)\,.$$

(4) *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt. Dann gelten die folgenden Aussagen* (i) *bis* (iv).

(i) H_x *ist nicht-leer und beschränkt.*

(ii) H_x *besitzt ein größtes und ein kleinstes Element.*

(iii) *Die reelle Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$s_n = \sup_{k\ge n}(x_k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist monoton fallend und beschränkt. Es gilt*

$$\max(H_x) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\ge n}(x_k)) = \limsup_{n\to\infty}(x_n)\,.$$

(iv) *Die reelle Folge* $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$i_n = \inf_{k\ge n}(x_k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist monoton wachsend und beschränkt. Es gilt*

$$\min(H_x) = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\ge n}(x_k)) = \liminf_{n\to\infty}(x_n)\,.$$

Durch Definition 2.32 ergänzen wir die arithmetischen Rechenregeln. Allerdings bleiben die Ausdrücke

$$-\infty + \infty\,, \quad \infty - \infty\,, \qquad 0 \cdot (\pm\infty)\,, \quad \frac{\pm\infty}{\infty}\,, \quad \frac{\pm\infty}{-\infty}\,, \quad \frac{0}{0}\,, \quad \frac{\pm\infty}{0}$$

nach wie vor undefiniert. Wir heben ausdrücklich hervor, dass die erweiterten reellen Zahlen mit den ergänzten Rechenregeln keinen Körper bilden.

Definition 2.32.

(1) $(\forall a \in \mathbb{R}): \quad a + \infty = \infty + a = \infty\,.$

(2) $(\forall a \in \mathbb{R}): \quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty\,.$

(3) $(\forall a \in \mathbb{R}): \quad a/\infty = a/(-\infty) = 0\,.$

(4) $(\forall a \in \mathbb{R}_+): \quad a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty\,.$

(5) $(\forall a \in \mathbb{R}_+): \quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty\,.$

(6) $(\forall a \in \mathbb{R}_+): \quad a/0 = \infty\,.$

(7) $(\forall a \in \mathbb{R}_-): \quad a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$

(8) $(\forall a \in \mathbb{R}_-): \quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty\,.$

(9) $(\forall a \in \mathbb{R}_-): \quad a/0 = -\infty\,.$

(10) $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,.$

(11) $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty\,.$

3 Logarithmus und Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Logarithmus und seine Umkehrfuktion. Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Nach 2.12 gilt

$$\sqrt[n]{x} \sim 1 \,.$$

Wir vergleichen die Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$a_n = \sqrt[n]{x} - 1$$

gilt, mit der Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten

$$\sqrt[n]{x} \sim 1 + \frac{\log(x)}{n} \,.$$

Dabei ist $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der *Logarithmus*.

Wir kennzeichnen den *Logarithmus* und die *Exponentialfunktion* durch eine Funktionalgleichung und eine Wachstumsbedingung. Der Logarithmus stellt einen Zusammenhang zwischen der Multiplikation auf $\mathbb{R}_+$ und der Addition auf $\mathbb{R}$ her. Logarithmus und Exponentialfunktion sind die Umkehrfunktionen voneinander.

Leonhard Euler bewies 1740, dass die Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\gamma_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log(n)$$

konvergiert. Folglich divergiert die harmonische Reihe logarithmisch. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log(n) \,.$$

Dieses asymptotische Gesetz ist eine Aussage über die Verteilung der reziproken natürlichen Zahlen in der Menge der positiven reellen Zahlen. Siehe Beispiel 3.11.

Sei p_n die n-te Primzahl. Dann gilt nach dem Primzahlsatz (Vermutung von Carl Friedrich Gauß und Adrien Marie Legendre, Beweis durch Jacques Hadamard und Charles-Jean de la Vallée Poussin unabhängig voneinander im Jahre 1896) die Formel

$$p_n \sim n \log(n) \,.$$

Dieses asymptotische Gesetz ist eine Aussage über die Verteilung der Primzahlen in der Menge der positiven reellen Zahlen. Siehe Landau [61], p. 214.

Das klassische Werk [61] von Edmund Landau wird wegen seiner Bedeutung auch hundert Jahre nach seinem ersten Erscheinen im Jahre 1909 von der *American Mathematical Society* nachgedruckt.

Eine heuristische Darstellung einer Ableitung des Primzahlsatzes mit statistischen Methoden geben Courant und Robbins in [15], pp. 369-372.

Die Funktion $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\eta(x) = \begin{cases} -x\log(x) = x\log\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0\,, & 0 < x \leq 1\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

tritt in der Definition des informationstheoretischen Entropiebegriffes auf. Wir definieren die n-ten Entropiefunktionen in 15.8.

Wir schließen die Übersicht mit einer Formel, die einen Zusammenhang zwischen der Determinante und der Spur einer symmetrischen reellen Matrix herstellt. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\log(\det(A - tE_n)) = -\mathrm{tr}((A - tE_n)^{-1})$$

für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$.

Satz 3.1 (Logarithmus). *Es gibt genau eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften* (1) *und* (2).

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{R}_+) : \; f(xy) = f(x) + f(y)\,.$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : \; f(x) \leq x - 1\,.$

Diese eindeutig bestimmte reelle Funktion heißt der natürliche Logarithmus *oder* Logarithmus *und wird mit* log *bezeichnet. Aus der Funktionalgleichung* (1)*, dem sogenannten* Logarithmengesetz*, und der Wachstumsbedingung* (2) *ergibt sich die explizite Beschreibung*

(3) $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : \; \log(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)\,.$

Umgekehrt folgen aus (3) *die Eigenschaften* (1) *und* (2)*. Außerdem gilt die Einschließung*

(4) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}_+) : \; n\,(1 - 1/\sqrt[n]{x}) \leq \log(x) \leq n(\sqrt[n]{x} - 1)\,.$

Beweis. Wir erbringen den Beweis in mehreren Schritten.

Erster Schritt. Aus (1) ergeben sich für $x \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Q}$ die Beziehungen

$$f(1) = 0\,, \quad f(x^{-1}) = -f(x)\,, \quad f(x^r) = rf(x)\,.$$

Aus (2) folgt daher für $z \in \mathbb{R}_+$ die Abschätzung

$$-f(z) = f(z^{-1}) \leq z^{-1} - 1$$

und damit die Einschließung

$$1 - z^{-1} \leq f(z) \leq z - 1\,.$$

Wir setzen $z = x^{\frac{1}{n}}$ und erhalten

$$1 - x^{-\frac{1}{n}} \leq f(x^{\frac{1}{n}}) \leq x^{\frac{1}{n}} - 1\,.$$

Resultat. *Aus* (1) *und* (2) *folgt die Einschließung*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}_+): \quad n(1 - x^{-\frac{1}{n}}) \leq f(x) \leq n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\,.$$

Insbesondere folgt, dass $x = 1$ die einzige Nullstellen von f ist.

Zweiter Schritt. Aus beweistechnischen Gründen gehen wir für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ von der Folge $(\sqrt[n]{x})$ zur Teilfolge $(\sqrt[2^n]{x})$ über. Es gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}_+): \quad 2^n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[2^n]{x}}\right) \leq f(x) \leq 2^n(\sqrt[2^n]{x} - 1)\,.$$

Die linke Folge ist monoton wachsend und beschränkt. Die rechte Folge ist monoton fallend und beschränkt. Beide Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert.

Resultat. *Jede Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften* (1) *und* (2) *erfüllt*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n(\sqrt[2^n]{x} - 1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Im fünften Schritt beweisen wir die Darstellung (3)*.*

Dritter Schritt. Wir zeigen nun, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n(\sqrt[2^n]{x} - 1)$$

die Eigenschaften (1) und (2) besitzt.

Für $x,\, y \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$2^n(\sqrt[2^n]{xy} - 1) = 2^n(\sqrt[2^n]{x} - 1)\sqrt[2^n]{y} + 2^n(\sqrt[2^n]{y} - 1)\,.$$

Wegen $\sqrt[2^n]{y} \to 1$ liefert der Grenzübergang $n \to \infty$ das Logarithmengesetz (1).

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}_+$ gilt aufgrund der Monotonie der definierenden Folge

$$f(x) \leq 2^n(\sqrt[2^n]{x} - 1) \leq 2(\sqrt{x} - 1) \leq x - 1\,.$$

Also gilt die Wachstumsbedingung (2).

Resultat. *Es gibt genau eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, die die Eigenschaften* (1) *und* (2) *besitzt. Diese Funktion f besitzt die Grenzwertdarstellung*

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+): \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n(\sqrt[2^n]{x} - 1)\,.$$

Die Funktion f hat nur bei $x = 1$ eine Nullstelle.

Vierter Schritt. Der Nachweis von (3) erfordert eine kleine Vorbereitung. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > -1$ und konstantem Vorzeichen $\operatorname{sgn}(a_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der obigen Einschließung

$$1 - z^{-1} \leq f(z) \leq z - 1\,.$$

erhalten wir

$$\frac{a_n}{1+a_n} = 1 - \frac{1}{1+a_n} \leq f(1+a_n) \leq (1+a_n) - 1 = a_n\,.$$

Wir teilen die Ungleichungskette unter Beachtung des Vorzeichens durch a_n und wenden den Einschließungsstatz 2.11 an. Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1+a_n)}{a_n} = 1\,.$$

Fünfter Schritt. Abschließend beweisen wir die Grenzwertdarstellung (3). Wir betrachten für $x > 0$ mit $x \neq 1$ die Nullfolge (a_n) mit

$$a_n = \sqrt[n]{x} - 1\,.$$

Die Nullfolge (a_n) erfüllt die vorstehenden Voraussetzungen. Daher folgt

$$n \cdot (\sqrt[n]{x} - 1) = \frac{f(x)}{f(1+a_n)} \cdot a_n = f(x) \cdot \frac{a_n}{f(1+a_n)} \to f(x) \cdot 1 = f(x)\,.$$

Also gilt (3) für alle $x > 0$ mit $x \neq 1$. Für $x = 1$ gilt (3) trivialerweise. Damit ist der Beweis beendet. □

Beispiel 3.2. Nach Satz 3.1 gilt die Grenzwertdarstellung

$$\log(2) = \lim_{n\to\infty} 2^n(\sqrt[2^n]{2} - 1)\,.$$

Wir setzen $x_n = 2^n(\sqrt[2^n]{2} - 1)$. Näherungsweise gilt

n	x_n
0	1.000000000
5	0.700708756
10	0.693381829
15	0.693154511
20	0.693147409
25	0.693147187
30	0.693147180
35	0.693147180
40	0.693147180

Die Konvergenz ist sehr langsam. □

Der Logarithmus besitzt eine wichtige *Stetigkeitseigenschaft*. Der Logarithmus ist auf allen Intervallen der Form $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}_+$ *Lipschitz-stetig*. Lipschitz-stetige Abbildungen sind in der geometrischen Maßtheorie von großer Bedeutung.

Definition 3.3. *Seien A, $X \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen mit $A \subseteq X$. Sei $f : X \to \mathbb{R}$.*

(1) *f heißt* Lipschitz-stetig auf A, *wenn*

$$(\exists c \in \mathbb{R}_+)(\forall x, y \in A)\colon |f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|$$

gilt.

(2) *Wenn die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich X Lipschitz-stetig ist, dann heißt f* Lipschitz-stetig.

Beispiel 3.4. Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann sind alle polynomialen Funktionen $p\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ auf dem Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig. Es genügt, die Monome

$$p_n(x) = x^n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

zu betrachten. Wir setzen

$$\mu = \max\{|a|,\, |b|,\, 1\}\,.$$

Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
|p_0(x) - p_0(y)| &= |1 - 1| \leq |x - y|\,,\\
|p_1(x) - p_1(y)| &= |x - y| \leq |x - y|\,,\\
|p_2(x) - p_2(y)| &= |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 2\mu|x - y|\,,\\
|p_3(x) - p_3(y)| &= |x^3 - y^3| = |x - y| \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq 3\mu^2|x - y|\,,\\
|p_4(x) - p_4(y)| &= |x^4 - y^4| = |x - y| \cdot |x^3 + x^2y + xy^2 + y^3| \leq 4\mu^3|x - y|\,,\\
&\vdots\\
|p_n(x) - p_n(y)| &\leq n \cdot \mu^{n-1} \cdot |x - y|
\end{aligned}$$

für alle x, $y \in [a, b]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Siehe Beispiel 10.11 und den dritten Mittelwertsatz 11.22 der Differentialrechnung. □

Auf Intervallen der Form $[a, \infty)$ mit $a > 0$ ist der Logarithmus Lipschitz-stetig. Das Bild $\log(\mathbb{R}_+)$ ist nach oben und nach unten unbeschränkt. Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes für Lipschitz-stetige Funktionen ergibt sich, dass der Logarithmus eine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}$ ist, das heißt, keine reelle Zahl wird als Funktionswert ausgelassen.

Satz 3.5 (Zwischenwertsatz für Lipschitz-stetige Funktionen)**.** *Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit*

$$f(a) \neq f(b)\,.$$

(1) *Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\eta \in \mathbb{R}$ mit*

$$\min\{f(a), f(b)\} < \eta < \max\{f(a), f(b)\} \tag{3.1}$$

eine reelle Zahl $\xi \in (a,b)$ mit $\eta = f(\xi)$.

(2) *Jede reelle Zahl $\eta \in \mathbb{R}$, die* (3.1) *erfüllt, heißt ein* Zwischenwert *von $f(a)$ und $f(b)$. Wir sagen dann auch, dass η zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt.*

(3) *Jeder Zwischenwert einer Lipschitz-stetigen Funktion wird angenommen.*

Für weitere Zwischenwertsätze siehe Satz 6.18 *und Satz* 17.25.

Beweis. Weil f auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig ist, existiert $L \geq 0$ mit

$$(\forall x, y \in [a,b])\colon\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|\,.$$

Nach eventuellem Übergang zur negativen Funktion $-f$ können wir annehmen, dass

$$f(a) < \eta < f(b)$$

gilt. Um später das ϵ-Kriterium für Suprema uneingeschränkt auswerten zu können, setzen wir f zu einer Lipschitz-stetigen Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort. Wir setzen

$$F(x) = \begin{cases} f(a)\,, & x \in (-\infty, a)\,, \\ f(x)\,, & x \in [a,b]\,, \\ f(b)\,, & x \in (b, \infty)\,. \end{cases}$$

Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und Lipschitz-stetig. Es gilt

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\colon\ |F(x) - F(y)| \leq L|x-y|$$

Die Menge

$$M = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq \eta\}$$

ist nicht-leer. Als Teilmenge von $[a,b]$ ist M außerdem beschränkt. Nach dem Supremumsaxiom 1.34 gibt es $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$\xi = \sup(M)\,, \quad \xi \in [a,b]\,.$$

Nach dem ϵ-Kriterium 1.49 gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x_\epsilon \in M)\colon\ x_\epsilon \leq \xi < x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2L}\,.$$

Wegen $x_\epsilon \in M$ und $x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2L} \notin M$ gilt die Einschließung

$$F(x_\epsilon) \leq \eta < F(x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2L}) .$$

Weil $x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2L}$ größer als b sein kann, müssen wir die Fortsetzung F der gegebenen Funktion f verwenden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(\xi) - \eta| &= |F(\xi) - \eta| \\ &\leq |F(\xi) - F(x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2L})| + |F(x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2L}) - \eta| \\ &\leq L \cdot \frac{\epsilon}{2L} + |F(x_\epsilon + \frac{\epsilon}{2L}) - F(x_\epsilon)| \\ &\leq L \cdot \frac{\epsilon}{2L} + L \cdot \frac{\epsilon}{2L} = \epsilon . \end{aligned}$$

für alle $\epsilon > 0$. Also gilt $f(\xi) = \eta$. Aus $f(a) < \eta < f(b)$ folgt $\xi \in (a, b)$. Damit ist der Beweis beendet. $\square$

Nach diesem Einschub über die Lipschitz-Stetigkeit wenden wir uns wieder der Untersuchung des Logarithmus zu.

Satz 3.6 (Eigenschaften des Logarithmus)**.**

(1) *Für alle x, $y \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) .$$

(2) *Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$1 - x^{-1} \leq \log(x) \leq x - 1 .$$

(3) *Vorzeichenschema: Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\log(x) \begin{cases} < 0 , & x \in (0, 1) , \\ = 0 , & x = 1 , \\ > 0 , & x \in (1, \infty) . \end{cases}$$

(4) *Der Logarithmus ist auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend.*

(5) *Aus* (2) *folgt*

$$\tfrac{1}{2} \leq \log(2) \leq 1 .$$

Multiplikation mit $2n$ und $-2n$ liefern die beiden Einschießungen

$$n \leq \log(2^{2n}) \leq 2n , \quad -2n \leq \log(2^{-2n}) \leq -n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Bildmenge $\log(\mathbb{R}_+)$ des Logarithmus nach oben und unten unbeschränkt.

(6) *Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ und alle $x,\, y \in [a, \infty)$ gilt*

$$|\log(x) - \log(y)| \leq a^{-1} \cdot |x - y| \,.$$

Also ist der Logarithmus auf allen Intervallen $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}_+$ Lipschitz-stetig.

(7) *Der Logarithmus bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Dies folgt aus* (4), (6) *und dem Zwischenwertsatz* 3.5.

(8) *Der Logarithmus* log *ist ein Isomorphismus der multiplikativen Gruppe* $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$ *auf die additive Gruppe* $(\mathbb{R}, +, 0)$.

Beweis. Die Eigenschaften (1) und (2) sind nach Satz 3.1 klar. Das Vorzeichenschema (3) und Eigenschaft (5) folgen aus (2).

Wir zeigen, dass log streng monoton wachsend ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $x < y$ gegeben. Mit (3) und (1) erhalten wir die Ungleichungen

$$1 < \frac{y}{x} \quad 0 < \log(\frac{y}{x}) = \log(y) - \log(x) \,, \quad \log(x) < \log(y) \,.$$

Also ist log streng monoton wachsend.

Nachweis von (6). Seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $x,\, y \in [a, \infty)$ beliebig gewählt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $x \leq y$ annehmen. Mit (1) und (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\log(x) - \log(y)| &= \log(y) - \log(x) \\ &= \log(\frac{y}{x}) \leq \frac{y}{x} - 1 = \frac{y - x}{x} \leq \frac{|x - y|}{a} \,. \end{aligned}$$

Also ist log auf allen Intervallen der Form $[a, \infty)$ mit $a > 0$ Lipschitz-stetig.

Nachweis von (7) und (8). Wegen (4) ist log injektiv. Zu zeigen ist nur noch die Surjektivität von log. Mit der archimedischen Ordnungseigenschaft und (5) erhalten wir

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \log(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R} \,.$$

Dabei verwenden wir (6) und den Zwischenwertsatz 3.5. Dies zeigt, dass $\log \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ auch surjektiv ist. Aus (7), (1) und $\log(1) = 0$ folgt, dass log ein Gruppenisomorphismus von $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$ auf $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist. □

Der Sätze 3.1 und 3.6 gestatten es, die Umkehrfunktion des Logarithmus zu bilden und durch eine Funktional- und eine Wachstumseigenschaft zu charakterisieren. Die Eigenschaften der Exponentialfunktion ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften des Logarithmus.

Satz 3.7 (Exponentialfunktion)**.** *Es gibt genau eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit den folgenden beiden Eigenschaften.*

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : \; f(x+y) = f(x)f(y)$.

(2) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \; 1 + x \leq f(x)$.

Diese eindeutig bestimmte reelle Funktion heißt die Exponentialfunktion *und wird mit* exp *bezeichnet. Aus der Funktionalgleichung* (1)*, dem* Exponentialgesetz*, und der Wachstumsbedingung* (2) *ergibt sich*

(3) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \; \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Umgekehrt folgen aus (3) *die Eigenschaften* (1) *und* (2)*. Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion des Logarithmus. Es gilt die Einschließung*

(4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > |x|) : \; \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

Beweis. Aus (1) und (2) ergeben sich für $x \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{Q}$ die Beziehungen

$$f(0) = 1\,, \quad f(-x) = (f(x))^{-1}\,, \quad f(rx) = (f(x))^r\,.$$

Aus (2) folgt daher für $z < 1$ die Ungleichung

$$0 < 1 - z < f(-z) = (f(z))^{-1}\,.$$

Daher gilt die Einschließung

$$(\forall z < 1) : \quad 1 + z \leq f(z) \leq (1-z)^{-1}\,.$$

Für $z = x/n$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$ folgt

$$1 + \frac{x}{n} \leq f\left(\frac{x}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1}\,.$$

Wir erhalten die Einschließung

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > |x|) : \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}\,.$$

Die linke Folge ist monoton wachsend. Die rechte Folge ist monoton fallend. Beide Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert. Insbesondere ergibt sich

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad 0 < f(x)\,.$$

Wir zeigen, dass die Umkehrfunktion $\log^{-1}$ *die einzige Funktion auf* $\mathbb{R}$ *ist, die vorstehende Einschließung erfüllt.* Die Einzigkeit ist klar. Nach Satz 3.1 gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{R}_+) : \quad n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{y}}\right) \leq \log(y) \leq n(\sqrt[n]{y} - 1)\,.$$

Für $y = \log^{-1}(x)$ erhalten wir

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > |x|) : \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \log^{-1}(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}\,.$$

Damit folgt für $\log^{-1}$ *die Grenzwertdarstellung*

$$(\forall x \in \mathbb{R}): \quad \log^{-1}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Weil log das Logarithmengesetz erfüllt, *besitzt die Umkehrfunktion* $\log^{-1}$ *die Funktionaleigenschaft* (1). Aus der Monotonie der linken Folge der obigen Einschließung von $\log(x)$ und der Bernoulli'schen Ungleichung ergibt sich

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > |x|): \quad \log^{-1}(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x .$$

Also besitzt $\log^{-1}$ *auch Eigenschaft* (2). Damit ist der Beweis beendet. □

Satz 3.8 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.**

(1) $(\forall x \in \mathbb{R}): \; 0 < \exp(x)$.

(2) $\exp(0) = 1$.

(3) $\exp(1) = e$.

(4) $(\forall x \in \mathbb{R},\, x < 1): \; \max\{0, 1 + x\} \leq \exp(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.

(5) *Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.*

(6) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall x, y \in (-\infty, a]): \; |\exp(x) - \exp(y)| \leq \exp(a) \cdot |x - y|$.

(7) *In jedem Intervall* $(-\infty, a]$ *mit* $a \in \mathbb{R}$ *ist die Exponentialfunktion Lipschitz-stetig.*

(8) *Die Exponentialfunktion bildet* $\mathbb{R}$ *bijektiv auf* $\mathbb{R}_+$ *ab.*

(9) *Die Exponentialfunktion ist ein Isomorphismus der Gruppe* $(\mathbb{R}, +, 0)$ *auf die Gruppe* $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$.

Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Mit der Exponentialfunktion und dem Logarithmus kann a^x allgemein für reelle Exponenten x definiert werden.

Satz und Definition 3.9. *Sei* $a \in \mathbb{R}_+$.

(1) *Wir setzen*

$$a^x = \exp(x \log(a)) .$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) *Speziell für* $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *mit* $m \in \mathbb{Z}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$a^r = \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} .$$

(3) *Die Funktion* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *mit* $x \mapsto a^x$ *heißt die* Exponentialfunktion zur Basis a.

(i) *Sei $a = e$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$e^x = \exp_e(x) = \exp(x)\,.$$

Die Exponentialfunktion zur Basis e stimmt also mit der Exponentialfunktion aus Satz 3.7 überein.

(ii) *Für $a = 1$ ist $\exp_a$ die konstante Funktion $x \mapsto 1$.*

(4) *Sei zusätzlich $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ heißt der* Logarithmus zur Basis a.

(i) *Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}\,.$$

(ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\log_e(x) = \log(x)\,.$$

Der Logarithmus $\log$ *aus Satz* 3.1 *stimmt mit dem Logarithmus* $\log_e(x)$ *zur Basis e überein. Er wird oft mit* $\ln$ *bezeichnet.*

(5) *Seien a, $b \in \mathbb{R}_+$ mit $a \neq 1$ gegeben. Dann gelten*

$$\log_a(b^x) = x\log_a(b)\,, \quad b^x = \exp_a(x\log_a(b))$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$.

Satz 3.10.

(1) $(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in \mathbb{R}) :\ (ab)^x = a^x b^x\,.$

(2) $(\forall a \in \mathbb{R}_+)(\forall x, y \in \mathbb{R}) :\ a^{x+y} = a^x a^y\,.$

(3) $(\forall a \in \mathbb{R}_+)(\forall x, y \in \mathbb{R}) :\ a^{xy} = (a^x)^y\,.$

Beispiel 3.11 (Euler'sche Konstante)**.** Nach Beispiel 2.19 gilt

$$(\forall k \in \mathbb{N},\, k \geq 2) : \quad \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k\,.$$

Wir wenden den Logarithmus an und erhalten

$$(\forall k \in \mathbb{N},\, k \geq 2) : \quad \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} < \log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Die linke Ungleichung gilt auch für $k = 1$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log(k) \right)$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \log(n+1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Die Folge (a_n) ist streng monoton wachsend, weil alle Summanden

$$\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

positiv sind. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log(k) + \log(k-1) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \log(n) \end{aligned}$$

für $n \geq 2$ und $b_1 = 1$ definiert. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend, weil die Summanden

$$\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)$$

für $k \geq 2$ negativ sind. Aus der Monotonie, der Funktionalgleichung und der Wachstumseigenschaft des Logarithmus folgt

$$\begin{aligned} 0 < b_n - a_n &= \log(n+1) - \log(n) \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also konvergieren die beiden monotonen Folgen (a_n) und (b_n) gegen denselben Grenzwert. Dieser Grenzwert wird *Euler'sche Konstante* γ genannt. Es gilt

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \log(n) \right) .$$

Die Auswertung der Einschließung

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \quad 0 < a_n \leq \gamma \leq b_n$$

für $n = 1$ ergibt $\gamma \in (0, 1]$. Näherungsweise gilt

$$\gamma \approx 0.5772156649\ldots .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\left| \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) : \log(n) \right) - 1 \right| = \frac{b_n}{\log(n)} < \frac{b_1}{\log(n)} = \frac{1}{\log(n)} \,.$$

Folglich gilt die asymptotische Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log(n)\,.$$

Also ist die harmonische Reihe divergent. Siehe Beispiel 4.2. $\square$

4 Reelle Reihen

Reihen sind spezielle Folgen. Dementsprechend übertragen sich die Konvergenzkriterien von Folgen auf Reihen.

Definition 4.1. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge. Die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der* Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

heißt reelle Reihe*, die zu* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gehört. Wir schreiben*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Im Falle der Konvergenz bezeichnen wir den Grenzwert der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *als* Reihensumme *und schreiben*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

Eine Reihe, die nicht konvergiert, heißt divergent*. Wie üblich lassen wir Indexmengen der Form* $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ *mit* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *zu. Vergleiche Definition* 2.8*.*

Beispiel 4.2 (Harmonische Reihe)**.** Die zu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ gehörige Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

heißt *harmonische Reihe*. Beispiel 3.11 gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log(n)\,.$$

Folglich ist die harmonische Reihe divergent. Weil ihre n-ten Partialsummen asymptotisch gleich $\log(n)$ sind, sagen wir, dass die harmonische Reihe *logarithmisch divergiert*. Die Divergenz kann mit folgendem Standardtrick direkt bewiesen werden: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $n > 2^k$ gilt

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{k}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung folgt die Divergenz der harmonischen Reihe. Die harmonische Reihe wird in vielen Divergenzbeweisen als divergente Minorante verwendet. □

Beispiel 4.3 (Geometrische Reihe)**.** Sei $q \in \mathbb{R}$ gegeben. Die zu $1, q, q^2, q^3, \ldots$ gehörige Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

heißt *geometrische Reihe*. Nach der geometrischen Summenformel aus Beispiel 1.20 konvergiert die geometrische Reihe für $|q| < 1$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}\,.$$

Beispielsweise erhalten wir für $q = \frac{1}{2}$ die Reihensumme

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2\,.$$

Geometrischen Reihen treten in vielen Konvergenzbeweisen als konvergente Majoranten auf. Wichtig ist, dass die Reihensumme einer konvergenten geometrische Reihe leicht bestimmt werden kann. □

Beispiel 4.4 (Reihe der reziproken Quadrate)**.** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

ist konvergent. Wir zeigen, dass die entsprechende Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist. Nach Satz 2.16 ist die Reihe der reziproken Quadrate konvergent. Für $k \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\,.$$

Sei $n \geq 2$. Summation über $k = 2, \ldots, n$ ergibt

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= 1 + \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\} = 2 - \frac{1}{n}\,.$$

Also gilt

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2\,.$$

Euler hat gezeigt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt. $\square$

Wir untersuchen die *alternierende harmonische* Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

und die *Leibniz-Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

auf Konvergenz. Wegen des wechselnden Vorzeichens sind beide Reihen *alternierend.*

Satz 4.5 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)**.** *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die alternierende Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

konvergent. Ihre Summe s erfüllt die Fehlerabschätzung

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ die n-te Partialsumme. Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, gelten (1), (2), (3) für alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) $s_{2n} - s_{2n-2} = a_{2n} - a_{2n-1} \leq 0\,.$

(2) $s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0\,.$

(3) $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \geq 0\,.$

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Für $k = \max\{m, n\}$ gilt die Ungleichungskette

(4) $s_1 \leq s_{2m-1} \leq s_{2k-1} \leq s_{2k} \leq s_{2n} \leq s_2\,.$

Die mittlere Ungleichung gilt wegen (3). Die beiden linken Ungleichungen gelten wegen (2). Die beiden rechten Ungleichungen gelten wegen (1). Die Folge $(s_{2m-1})_{m\in\mathbb{N}}$ ist wegen (2) monoton wachsend. Die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen (1) monoton fallend. Beide Folgen sind wegen (4) beschränkt. Also konvergieren beide Folgen. Daher gibt es s', $s'' \in \mathbb{R}$ mit

$$s' = \lim_{m\to\infty} s_{2m-1}\,, \quad s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n}\,, \quad s' \le s''\,.$$

Die Dreiecks-Ungleichung und (3) liefern

$$\begin{aligned} 0 &\le |s'' - s'| \\ &\le |s'' - s_{2n}| + |s_{2n} - s_{2n-1}| + |s' - s_{2n-1}| \\ &= |s'' - s_{2n}| + |a_{2n}| + |s' - s_{2n-1}| \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, folgt

$$s' = s''\,.$$

Daher können wir $s = s' = s''$ setzen. Also gilt

$$s_1 \le s_{2k-1} \le s_{2k+1} \le s' = s = s'' \le s_{2k} \le s_2 \le s_0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |s - s_n| &= \begin{cases} |s - s_{2k-1}|\,, & n = 2k-1\,, \\ |s_{2k} - s|\,, & n = 2k \end{cases} \\ &\le \begin{cases} |s_{2k} - s_{2k-1}|\,, & n = 2k-1\,, \\ |s_{2k} - s_{2k+1}|\,, & n = 2k \end{cases} \\ &\le \begin{cases} |a_{2k}|\,, & n = 2k-1\,, \\ |a_{2k+1}|\,, & n = 2k \end{cases} \\ &= a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Also konvergiert die alternierende Reihe gegen s. Ferner gilt

$$0 \le a_0 - a_1 = s_1 \le s \le s_0 = a_0\,.$$

Die obige Fehlerabschätzung gilt daher auch im Fall $n = 0$, denn wir erhalten

$$|s - s_0| = s_0 - s \le a_0 - (a_0 - a_1) = a_1\,.$$

Damit ist der Beweis des Leibniz-Kriteriums beendet. □

Beispiel 4.6. Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \log(2)\,.$$

Siehe Mercator-Reihe für $x = 1$ in Beispiel 7.6. □

Beispiel 4.7. Die Leibniz-Reihe ist konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Siehe Arcustangens-Reihe für $x = 1$ in Beispiel 13.9. □

Das *Cauchy-Konvergenzkriterium* lässt sich direkt von Folgen auf Reihen übertragen.

Satz 4.8 (Cauchy-Konvergenzkriterium). *Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\epsilon)(\forall k \in \mathbb{N}) : \quad \left| \sum_{\kappa=n}^{n+k} a_\kappa \right| = |a_n + \ldots + a_{n+k}| \leq \epsilon$$

erfüllt ist.

Aus dem Cauchy-Konvergenzkriterium folgt das *Majorantenkriterium.*

Satz 4.9 (Majorantenkriterium). *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine konvergente Majorante *für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Oft wird eine konvergente Majorante mit Hilfe einer geometrischen Reihe konstruiert.

Beispiel 4.10 (Dezimalentwicklung). *Sei $x \in [0, 1)$.*

(1) *Die reelle Zahl x besitzt eine Reihendarstellung*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 10^{-k}$$

mit $x_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Offenbar ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - 10^{-1}} - 10^{-1} \right) = 9 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{1}{10} \right) = 1$$

ist eine konvergente Majorante.

(2) *Wir schreiben*

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4\ldots\,.$$

Eine solche Darstellung heißt eine Dezimalentwicklung *von x.*

(3) *Die Ziffern x_k sind nicht eindeutig bestimmt.*

$$\frac{1}{10} = 0.1 = 0.0\overline{9}\,, \quad \frac{1}{20} = 0.05 = 0.04\overline{9}\,.$$

Dabei wird die überstrichene Ziffer periodisch wiederholt.

(4) *Eine Dezimalentwicklung heißt* normal*, wenn*

$$x_k \neq 9$$

für unendliche viele $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(5) *Jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ besitzt genau eine normale Dezimalentwicklung.*

(i) $r_0 = x\,.$

(ii) $(\forall k \in \mathbb{N}):\ x_k = \lfloor 10 r_{k-1} \rfloor\,,\ r_k = 10 r_{r-1} - x_k\,.$

Umgekehrt liefert jede normale Dezimalentwicklung $0.x_1x_2x_3\ldots$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $x \in [0,1)$.

(6) *In einer normalen Dezimalentwicklung können unendlich viele Ziffern x_k gleich 9 sein.*

$$\frac{1}{11} = 0.\overline{09}\,, \quad \frac{1}{21} = 0.\overline{047619}\,.$$

Dabei werden die überstrichenen Ziffernfolgen periodisch wiederholt.

Dezimalentwicklungen sowie Entwicklungen nach den Basen 3 und 2 werden im Beweis des Satzes 22.10 von Cantor verwendet. □

Besonders wichtig ist der Begriff der *absoluten Konvergenz.*

Definition 4.11. *Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt* absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.*

Aus dem Majorantenkriterium 4.9 folgt sofort, dass absolut konvergente Reihen konvergent sind.

Satz 4.12. *Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ absolut konvergent ist, dann konvergiert sie auch.*

Die Umkehrung des Satzes 4.12 gilt nicht, wie das Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe zeigt.

Beispiel 4.13. Jede geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| < 1$ konvergiert absolut, denn es gilt

$$0 < \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n = \frac{1}{1-|q|}\,.$$

Insbesondere für $q = -\frac{1}{2}$ gilt

$$0 < \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} = \tfrac{2}{3} < 2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-k}\,.$$

Siehe Beispiel 4.3. □

Aus dem Majorantenkriterium 4.9 folgt durch Vergleich mit einer geeigneten konvergenten geometrischen Reihe das *Quotientenkriterium.*

Satz 4.14 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiere der Grenzwert*

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|\,.$$

Dann gelten die folgenden drei Aussagen.

(1) *Wenn $q < 1$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.*

(2) *Wenn $q > 1$ gilt, dann divergiert die Reihe $\sum a_n$.*

(3) *Im Fall $q = 1$ wird keine Konvergenzaussage über die Reihe $\sum a_n$ gemacht.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $0 \leq q$.

Nachweis von (1). Im Fall $0 \leq q < 1$ sei $\eta \in (q, 1)$ gewählt. Dann gilt nach Voraussetzung

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\,: \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \eta\,.$$

Mit vollständiger Induktion erhalten wir

$$(\forall n \geq n_0)\,: \quad |a_n| \leq \eta^{n-n_0} |a_{n_0}|\,.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit

$$b_n = \begin{cases} \max\{|a_1|, \dots |a_{n_0}|\}\,, & n \leq n_0\,, \\ \eta^{n-n_0} |a_{n_0}|\,, & n > n_0 \end{cases}$$

eine konvergente Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nachweis von (2). Sei $1 < q$. Dann gilt $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nachweis von (3). Wir betrachten die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Die harmonische Reihe ist divergent. Die Reihe der reziproken Quadrate ist konvergent. Für beide Reihen gilt $q = 1$. Die Betrachtung der Quotienten

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

reicht für eine Konvergenzaussage in diesem Fall also nicht aus. Deshalb macht das Quotientenkriterium im Fall $q = 1$ keine Aussage. □

Beispiel 4.15 (Exponentialreihe)**.** Die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert nach dem Quotientenkriterium für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ absolut, denn es gilt

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1\,.$$

Die absolute Konvergenz im Fall $x = 0$ ist trivialerweise erfüllt. Später werden wir sehen, dass die Exponentialreihe die Exponentialfunktion darstellt. Siehe Beispiel 4.17. □

Das *Wurzelkriterium* folgt ebenfalls aus dem Majorantenkriterium 4.9 durch Vergleich mit einer geeigneten konvergenten geometrischen Reihe.

Satz 4.16 (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine reelle Reihe. Nach* 2.31 *existiert der Limes superior*

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

im Intervall $[0, \infty]$. *Es gelten die folgenden drei Aussagen.*

(1) *Wenn* $q < 1$ *gilt, dann konvergiert die Reihe* $\sum a_n$ *absolut.*

(2) *Wenn* $q > 1$ *gilt, dann divergiert die Reihe* $\sum a_n$.

(3) *Im Fall* $q = 1$ *wird keine Konvergenzaussage über die Reihe* $\sum a_n$ *gemacht.*

Beweis. Wir verfahren analog zum Beweis des Quotientenkriteriums.

Nachweis von (1). Im Fall $0 \leq q < 1$ sei $\eta \in (q, 1)$ gewählt. Dann gilt

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq \eta \,.$$

Wir erhalten

$$(\forall n \geq n_0) : \quad |a_n| \leq \eta^n \,.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit

$$b_n = \begin{cases} \max\{|a_1|, \ldots |a_{n_0}|\} \,, & n \leq n_0 \,, \\ \eta^n \,, & n > n_0 \end{cases}$$

eine konvergente Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nachweis von (2). Sei $1 < q$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nachweis von (3). Wir betrachten die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,.$$

Die harmonische Reihe ist divergent. Die Reihe der reziproken Quadrate ist konvergent. Wegen

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1 \,, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \cdot 1 = 1$$

gilt für beide Reihen $q = 1$. Die Betrachtung der Wurzeln $\sqrt[n]{|a_n|}$ reicht für eine Konvergenzaussage im Fall $q = 1$ also nicht aus. Deshalb macht das Wurzelkriterium im Fall $q = 1$ keine Aussage. □

Beispiel 4.17 (Exponentialreihe)**.** Die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert nach dem Wurzelkriterium 4.16 für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut. Nach 2.21 gilt die Einschließung

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die linke Ungleichung liefert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \,.$$

Folglich gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Siehe Beispiel 4.15. □

Beispiel 4.18 (Cosinus-Reihe)**.** Die Cosinus-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}$$

konvergiert nach dem Wurzelkriterium 4.16 für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut. Diese Reihe besteht aus den Summenden a_n mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\,, & n = 2k\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \\ 0\,, & n = 2k+1\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$

Die Summanden a_n mit ungeradem Index tragen den Häufungspunkt 0 zur Menge der Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}_0}$ bei. Folglich gilt

$$\begin{aligned} 0 \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[k]{k!}} = 0\,. \end{aligned}$$

Siehe Satz und Definition 5.1. □

Beispiel 4.19 (Sinus-Reihe)**.** Die Sinus-Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\, x^{2l+1}$$

konvergiert nach dem Wurzelkriterium 4.16 für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut. Der Beweis läuft analog zu dem in 4.18. Siehe Satz und Definition 5.1. □

Wenn eine Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent ist, dann ist sie auch nach dem Wurzelkriterium konvergent. Die Umkehrung gilt nicht.

Die Bedeutung der absoluten Konvergenz liegt darin, dass mit absolut konvergenten Reihen in gewissem Sinn wie mit endlichen Summen gerechnet werden kann. Der Umordungssatz und das Cauchy-Produkt sind dafür Beispiele. In der Definition des *Cauchy-Produktes* zweier Reihen ist es günstig, die Nummerierung der Reihensummanden bei 0 beginnen zu lassen.

Definition 4.20. *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *entsteht aus einer Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *durch* Umordnen, *wenn es eine Bijektion* $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *derart gibt, dass* $b_n = a_{\varphi(n)}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Satz 4.21 (Umordnungssatz)**.** *Jede Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$*, die aus einer absolut konvergenten Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *durch Umordnen entsteht, ist absolut konvergent mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,.$$

Nach dem Umordnungssatz 4.21 kommt es bei der Bildung der Reihensumme einer absolut konvergenten Reihe nicht auf die Summationsreihenfolge an. Geschicktes Aufsummieren liegt dem Cauchy-Produkt zu Grunde: Die Rechenregel für die Multiplikation von Polynomen wird auf absolut konvergente Reihen übertragen.

Definition 4.22. *Seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ *zwei Reihen. Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *mit*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

heißt das Cauchy-Produkt *von* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$*.*

Satz 4.23 (Satz vom Cauchy-Produkt)**.** *Das Cauchy-Produkt* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *zweier absolut konvergenter Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ *ist absolut konvergent mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) \,.$$

Als Anwendung des Cauchy-Produktes zeigen wir, dass die Exponentialreihe die Funktionalgleichung (1) aus Satz 3.7 erfüllt.

Beispiel 4.24 (Eigenschaften der Exponentialreihe)**.**

(1) Nach dem Binomialsatz 1.23 gilt

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k y^{n-k}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \,.$$

Folglich ist die Exponentialreihe in $x + y$ ist das Cauchy-Produkt der Exponentialreihen in x und y. Die in Rede stehenden Reihen sind absolut konvergent.

(2) Nach Satz 4.23 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\right) \,.$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$.

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x)^n}{n!}\right)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^l}{l!}\right) \geq 0\,.$$

□

Nach diesen Vorbereitungen können wir zeigen, dass die Exponentialreihe die Exponentialfunktion darstellt.

Satz 4.25 (Exponentialfunktion, Exponentialreihe)**.**

(1) *Die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.1}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ *absolut.*

(2) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{4.2}$$

Also stellt die Exponentialreihe die Exponentialfunktion dar.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R}^{\times}):\ 1 + x < \exp(x)$.

(4) $(\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}):\ 1 - x^{-1} < \log(x) < x - 1$.

Beweis. Wie wir gesehen haben, ist die Exponentialreihe nach dem Quotientenkriterium und nach dem Wurzelkriterium für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Wir setzen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zum Nachweis von Aussage (2) ist wegen Beispiel 4.24 nur noch die Wachstumsbedingung (2) aus Satz 3.7 nachzuprüfen.

(i) $1 = f(0)$.

(ii) Für alle $x > 0$ gilt

$$1 + x < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

(iii) Für alle $x < -1$ gilt

$$1 + x < 0 \leq f(x) \,.$$

Dies folgt aus 4.24.

(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\left(1 + \frac{x}{2n+1}\right) \,.$$

(v) Für alle $x \in [-1, 0)$ gilt

$$1 + x < f(x) \,.$$

Dies folgt aus (iv).

Damit sind (2) und (3) bewiesen. Schließlich folgt (4) aus (3). □

5 Cosinus und Sinus

Bevor wir mit der Erörterung der trigonometrischen Funktionen *Cosinus* und *Sinus* beginnen, erinnern wir an die Ausführungen zu den *komplexen Zahlen* in der Vorlesung *Lineare Algebra* im Wintersemester.

Bisher haben wir nur reelle Folgen und Reihen betrachtet. Nun lassen wir auch komplexe Zahlen als Folge- und Reihenglieder zu. Der Konvergenzbegriff kann Wort für Wort übernommen werden. Es muss dabei nur die Betragsfunktion für reelle Zahlen durch die Betragsfunktion für komplexe Zahlen ersetzt werden. Allerdings macht für beliebige komplexe Folgen der Begriff der monotonen Folge keinen Sinn mehr. Von dieser Ausnahme abgesehen, gelten unsere früheren Überlegungen sinngemäß auch für komplexe Folgen und Reihen.

Die Exponentialreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut. Daher macht es Sinn, die Exponentialfunktion durch

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

zu einer Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortzusetzen. Die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

gilt für alle $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

Nun berechnen wir Real- und Imaginärteil von e^{ix} für $x \in \mathbb{R}$. Dementsprechend führen wir zwei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$e^{ix} = f(x) + ig(x)$$

ein. Es gelten

$$i^2 = -1\,, \quad i^3 = -i\,, \quad i^4 = 1\,.$$

Wegen der absoluten Konvergenz können wir die Summanden der Reihe für e^{ix} nach Real- und Imaginärteil neu anordnen.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \right) + i \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\, x^{2l+1} \right) . \end{aligned}$$

Für die beiden reellen Funktionen f und g erhalten wir die Reihendarstellungen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\,, \quad g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\, x^{2l+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil die reelle Exponentialreihe nach Beispiel 4.15 und 4.17 für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, konvergieren die reellen Reihen für f und g nach dem Majorantenkriterium 4.9 ebenfalls absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Wir wenden die Funktionalgleichung zweimal an. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 1 &= e^{ix} \cdot e^{-ix} \\ &= (f(x) + ig(x)) \cdot (f(x) - ig(x)) \\ &= f^2(x) + g^2(x) \,. \end{aligned}$$

Diese Identität heißt der *Satz des Pythagoras.* Aus dem Satz des Pythagoras folgen die Abschätzungen

$$0 \leq |f(x)| \leq 1 \,, \quad 0 \leq |g(x)| \leq 1 \,.$$

Die Funktionalgleichung liefert die *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} f(x+y) + ig(x+y) &= e^{i(x+y)} \\ &= e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (f(x) + ig(x)) \cdot (f(y) + ig(y)) \\ &= (f(x)f(y) - g(x)g(y)) + i(f(x)g(y) + f(y)g(x)) \end{aligned}$$

für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Satz und Definition 5.1 (Cosinus und Sinus)**.**

(1) *Die Funktionen* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *seien durch*

$$\cos(x) + i\sin(x) = \exp(ix)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ *definiert. Wir nennen diese beiden Funktionen den* Cosinus *respektive den* Sinus.

(2) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten die Reihendarstellungen*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \,, \quad \sin(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\, x^{2l+1} \,.$$

Diese Reihen konvergieren in allen $x \in \mathbb{R}$ *absolut.*

(3) *Für alle* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *gelten* (i) *bis* (ix).

(i) $\cos(0) = 1$.

(ii) $\sin(0) = 0$.

(iii) $\cos(-x) = \cos(x)$.

(iv) $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(v) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

(vi) $\cos(x) \in [-1, 1]$.

(vii) $\sin(x) \in [-1, 1]$.

(viii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

(ix) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

(4) *Für alle* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *gelten* (i) *bis* (v).

(i) $|e^{ix}| = 1$.

(ii) $0 \leq |1 - e^{ix}| = \sqrt{2 - 2\cos(x)} \leq |x|$.

(iii) $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$.

(iv) $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$.

(v) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

Also sind Cosinus und Sinus auf $\mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig.*

Cosinus und Sinus werden nach Satz 5.1 paarweise definiert. Eine genaue Untersuchung der Reihendarstellungen ergibt weitere Eigenschaften, die wir in Satz 5.3 zusammenfassen. Insbesondere zeigen wir, dass Cosinus und Sinus periodische Funktionen sind.

Definition 5.2. *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben.*

(1) *Sei* $p \in \mathbb{R}_+$. *Die Funktion* f *heißt* p-periodisch, *wenn* $f(x+p) = f(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt. Dann heißt die positive Zahl* p eine Periode von f.

(2) *Die Funktion* f *heißt* periodisch, *wenn es* $p \in \mathbb{R}_+$ *derart gibt, dass* f *eine* p*-periodische Funktion ist.*

(3) *Offenbar gilt: Mit* $p \in \mathbb{R}_+$ *ist auch* $2p$ *eine Periode von* f.

(4) *Sei* f *eine periodische Funktion. Dann heißt die kleinste Periode von* f die Periode von f.

Satz 5.3 (Weitere Eigenschaften von Cosinus und Sinus)**.**

(1) $\cos(0) = 1\,,\ \ \cos(2) < -\frac{1}{3}\,,\ \ \sin(0) = 0\,.$

(2) $\cos$ *ist auf* $[0,2]$ *streng monoton fallend.*

(3) $\cos$ *besitzt in* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle. Diese wird mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet.*

(4) $\cos(0) = 1\,,\ \ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0\,,\ \ \cos(\pi) = -1\,,\ \ \cos(\frac{3}{2}\pi) = 0\,,\ \ \cos(2\pi) = 1\,.$

(5) $\sin(0) = 0\,,\ \ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1\,,\ \ \sin(\pi) = 0\,,\ \ \sin(\frac{3}{2}\pi) = -1\,,\ \ \sin(2\pi) = 0\,.$

(6) Formel von Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0\,.$

(7) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ \ \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)\,,\ \ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)\,.$

(8) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ \ \cos(x + \pi) = -\cos(x)\,,\ \ \sin(x + \pi) = -\sin(x)\,.$

(9) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ \ \cos(x + 2\pi) = \cos(x)\,,\ \ \sin(x + 2\pi) = \sin(x)\,.$

(10) $\cos$ *ist auf* $[0,\pi]$ *streng monoton fallend.*

(11) $\sin$ *ist auf* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend.*

(12) $\frac{\pi}{2}$ *ist die kleinste positive Nullstelle von* $\cos$.

(13) π *ist die kleinste positive Nullstelle von* sin.

(14) 2π *ist die kleinste Periode von* cos *und* sin.

(15) $\cos(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Beweis. Nachweis von (1). Aus den Reihendarstellungen folgt, dass der Cosinus eine gerade Funktion und der Sinus eine ungerade Funktion ist. Die Reihendarstellungen liefern die Werte

$$\cos(0) = 1\,, \quad \sin(0) = 0\,.$$

Wir schätzen cos(2) nach oben ab. Es gilt

$$\begin{aligned}
\cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} \mp \dots \\
&= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}\right) - \dots \\
&= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - r \\
&= -\frac{1}{3} - r
\end{aligned}$$

mit $r > 0$. Also gilt $\cos(2) < -\frac{1}{3}$.

Nachweis von (2). Für alle $0 < x \leq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \\
&= \frac{x^1}{1!}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^7}{6 \cdot 7}\right) + \dots \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

Seien x, $y \in [0, 2]$ mit $x < y$ gegeben. Dann gilt

$$\cos(y) - \cos(x) = (-2) \cdot \sin\left(\frac{y + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y - x}{2}\right) > 0\,.$$

Also ist der Cosinus auf $[0, 2]$ streng monoton fallend.

Nachweis von (3). Nach Satz und Definition 5.1 ist der Cosinus auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Nach dem Zwischenwertsatz 3.5 für Lipschitz-stetige Funktionen nimmt der Cosinus jeden Wert zwischen cos(0) und cos(2) an. Daher besitzt diese Funktion im Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle. Wegen der strengen Monotonie besitzt der Cosinus eine einzige Nullstellen im Intervall $[0, 2]$. Diese wird mit $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet.

Die Aussagen (4) *bis* (9) folgen aus (1), (3) und den Additionstheoremen des Satzes 5.1.

Nachweis von (10) *und* (11). Wegen (3) ist der Cosinus auf $[0, \frac{1}{2}\pi]$ streng monoton fallend. Nach (7) gilt

$$\sin(x) = -\cos(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist der Sinus auf $[-\frac{1}{2}\pi, 0]$ streng monoton wachsend. Seien $0 \leq x < y \leq \frac{1}{2}\pi$ gegeben. Dann gilt

$$\sin(y) - \sin(x) = -\sin(-y) + \sin(-x) = \sin(-x) - \sin(-y) > 0\,.$$

Also ist der Sinus auf $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ streng monoton wachsend. Nach (7) gilt

$$\cos(x + \tfrac{1}{2}\pi) = -\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist der Cosinus auf $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ streng monoton fallend. Also ist der Cosinus auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend. Damit sind (10) und (11) bewiesen.

Die übrigen Aussagen (12) *bis* (15) *folgen aus* (1) *bis* (10). Damit ist der Beweis des Satzes 5.3 beendet. □

6 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt definieren wir die *Stetigkeit* von reellen Funktionen. Insbesondere sind Lipschitz-stetige Funktionen stetig. Als Ausgangspunkt und Definition wählen wir das *ϵ-δ-Kriterium der Stetigkeit.* Es ist dabei auf die Stellung der Quantoren zu achten.

Definition 6.1 (Das ϵ-δ-Kriterium der Stetigkeit)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine reelle Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist* in $a \in A$ stetig*, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A): \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

erfüllt ist. Die Funktion f heißt stetig*, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches A stetig ist. Oft schreiben wir $\delta = \delta(a, \epsilon)$, um die Abhängigkeit der Zahl $\delta > 0$ von der Zahl $\epsilon > 0$ und der Stelle $a \in A$ zum Ausdruck zu bringen.*

Ein sehr wichtiges und zugleich einfaches Beispiel einer stetigen Funktion ist die Betragsfunktion.

Beispiel 6.2. Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $\epsilon > 0$ kann $\delta(a, \epsilon) = \epsilon$ gewählt werden. □

Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist Lipschitz-stetig und stetig. Allgemein gilt folgender Zusammenhang:

Satz 6.3. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Sei $c > 0$ eine positive reelle Konstante mit*

$$(\forall x, a \in A): \quad |f(x) - f(a)| \leq c\,|x - a|\,.$$

Dann gelten (1) *und* (2)*.*

(1) *f ist stetig.*

(2) *Für alle $a \in A$ und alle $\epsilon > 0$ kann $\delta(a, \epsilon) = \epsilon/c$ gewählt werden.*

Beweis. Das ϵ-δ-Kriterium für die Stetigkeit an der Stelle $a \in A$ wird daher von $\delta(a, \epsilon) = \epsilon/c$ erfüllt. □

Beispiele 6.4. Nach 5.3 sind cos und sin auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Also sind cos und sin nach 6.3 auf $\mathbb{R}$ stetig. □

Beispiel 6.5. Nach 3.6 ist log auf jedem Intervall $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Aus 6.3 folgt daher, dass log auf $\mathbb{R}_+$ stetig ist. □

Beispiel 6.6. Nach 3.8 ist exp auf jedem Intervall $(-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Aus 6.3 folgt daher, dass exp auf $\mathbb{R}$ stetig ist. $\square$

Wir zeigen nun, dass die Quadratwurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ in jedem Punkt der nicht-negativen Zahlengerade stetig ist. Diese Funktion ist auf dem abgeschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$ nicht Lipschitz-stetig.

Beispiel 6.7. Die Quadratwurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Zuerst betrachten wir $a = 0$. In diesem Fall wird das ϵ-δ-Kriterium von $\delta(0, \epsilon) = \epsilon^2$ erfüllt, denn es gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall x \geq 0): \quad |\sqrt{x} - \sqrt{0}\,| \leq \epsilon \Leftrightarrow |x - 0| \leq \epsilon^2 .$$

Nun sei $a > 0$. In diesem Fall wird das ϵ-δ-Kriterium von $\delta(a, \epsilon) = \epsilon \sqrt{a}$ erfüllt, denn es gilt

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall x \geq 0): \quad |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{\epsilon \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \epsilon .$$

Wir heben hervor, dass δ von $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ abhängt. $\square$

Definition 6.8. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ von $[a, b]$ derart gibt, dass die Einschränkungen von f auf die offenen Intervalle (x_{k-1}, x_k) stetige Fortsetzungen auf die abgeschlossenen Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ besitzen.*

Beispiel 6.9 (Sägezahnfunktion mit zwei Zähnen)**.** Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0, 1)\,, \\ x - 1\,, & x \in [1, 2)\,, \\ 0\,, & x = 2 \end{cases}$$

ist stückweise stetig und beschränkt. Die Funktion f ist nur in Punkten $x = 1$ und $x = 2$ unstetig. Siehe Beispiel 17.16. $\square$

Es gibt reelle Funktionen, die in keinem Punkt der Zahlengerade stetig sind. Ein Beispiel ist die Dirichlet-Funktion.

Beispiel 6.10. Die *Dirichlet-Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen, dass das ϵ-δ-Kriterium in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann. Zuerst sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Die Menge $\mathbb{Q}$ liegt nach Satz 1.43 dicht in $\mathbb{R}$. Also folgt

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{Q}): \quad |x - a| \leq \delta\,, \quad |f(x) - f(a)| = 1\,.$$

Nun sei $a \in \mathbb{Q}$. Eine Variante von Satz 1.43 zeigt, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt.

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}): \quad |x - a| \leq \delta\,, \quad |f(x) - f(a)| = 1\,.$$

Damit ist gezeigt, dass die Dirichlet-Funktion nirgends stetig ist. Vergleiche Beispiel 17.6 □

Das ϵ-δ-Kriterium 6.1 kann auch mit Hilfe von ϵ- und δ-Umgebungen ausgedrückt werden. Satz 6.12 ist lediglich eine Umformulierung von Definition 6.1. Wir beginnen mit der Definition der ϵ-Umgebungen. Der Fall $\epsilon = \infty$ wird im Hinblick auf den Satz 7.2 von Cauchy-Hadamard ausdrücklich zugelassen.

Definition 6.11. *Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Zuerst sei $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Das offene Intervall*

$$U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \epsilon\}$$

heißt die offene ϵ-Umgebung von a. *Das abgeschlossene Intervall*

$$\overline{U_\epsilon(a)} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq \epsilon\}$$

heißt die abgeschlossene ϵ-Umgebung von a. *Im Fall $\epsilon = \infty$ setzen wir*

$$U_\epsilon(a) = \mathbb{R}\,, \quad \overline{U_\epsilon(a)} = \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Siehe 7.1 *und* 7.2.

Satz 6.12. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine reelle Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $a \in A$ stetig, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0): \quad f(U_\delta(a) \cap A) \subseteq U_\epsilon(f(a))$$

erfüllt ist.

Die Stetigkeit einer reellen Funktion an einer Stelle ihres Definitionsbereiches kann auch mit Hilfe konvergenter Folgen ausgedrückt werden. Wenn die Folgeglieder a_n einer reellen Folge (a_n) in einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ enthalten sind, schreiben wir dafür $(a_n) \subseteq A$.

Satz 6.13 (Folgenkriterium der Stetigkeit)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine reelle Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist in $a \in A$ genau dann stetig, wenn die Bedingung*

$$(\forall (a_n) \subseteq A): \quad a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a)$$

erfüllt ist.

Als typische Anwendung des Folgenkriteriums zeigen wir, dass die Signum-Funktion an der Stelle $a = 0$ *nicht* stetig ist.

Beispiel 6.14. Die *Signum-Funktion* $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 0\,, & x = 0\,, \\ \dfrac{x}{|x|}\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

definiert. Für die Nullfolge $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ist die Bildfolge $(\operatorname{sgn}(a_n))$ die konstante Folge $1, 1, 1, 1, \ldots$. Also gilt

$$\operatorname{sgn}(a_n) \to 1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0)\,.$$

Nach dem Folgenkriterium 6.13 ist die Funktion sgn an der Stelle $a = 0$ nicht stetig. In allen Punkten $a \neq 0$ ist sgn dagegen stetig. □

Mit dem Folgenkriterium 6.13 lassen sich die Regeln 2.10 über das Rechnen mit konvergenten Folgen in Rechenregeln für stetige Funktionen verwandeln.

Satz 6.15. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, die in $a \in A$ stetig sind. Dann gelten die folgenden Aussagen* (1) *bis* (4)*.*

(1) *$|f|$ mit $x \mapsto |f(x)|$ ist in a stetig.*

(2) *$f + g$ mit $x \mapsto f(x) + g(x)$ ist in a stetig.*

(3) *fg mit $x \mapsto f(x)g(x)$ ist in a stetig.*

(4) *Sei $g(a) \neq 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$. Wähle etwa $\delta = \delta(a, |g(a)|/2)$. Siehe Satz* 1.13*. Die Funktion $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$ für $x \in U_\delta(a) \cap A$ ist in a stetig.*

Die Funktionen $|f|$, $f + g$ und fg sind auf A definiert. Die Funktion f/g ist im Fall $g(a) \neq 0$ zumindest lokal definiert.

Aus dem Folgenkriterium ergibt sich insbesondere die Kettenregel 6.16 für stetige Funktionen.

Satz 6.16 (Kettenregel für stetige Funktionen)**.** *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen. Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(A) \subseteq B$. Ferner sei f in $a \in A$ und g in $b = f(a) \in B$ stetig. Dann ist die Komposition $g \circ f$ mit $x \mapsto g(f(x))$ in a stetig.*

Die Rechenregeln der Sätze 6.15 und 6.16 gestatten es oftmals, die Stetigkeit kompliziert zusammengesetzter Funktionen nachzuweisen.

Beispiele 6.17.

(1) Die Polynome $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ definieren auf $\mathbb{R}$ stetige Funktionen $x \mapsto p(x)$.

(2) Seien $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ teilerfremde Polynome. Sei N die Menge der reellen Nullstellen von $q(x)$. Dann ist $x \mapsto p(x)/q(x)$ auf der Menge $\mathbb{R} \setminus N$ eine stetige Funktion.

(3) Die Schränkungsabbildung $h : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ mit

$$h(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

und ihre Umkehrfunktion $h^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$h^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

sind auf ihren Definitionsbereichen $\mathbb{R}$ respektive $(-1, 1)$ stetig.

(4) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann $x \mapsto x^a = \exp(a \log(x))$ ist auf $\mathbb{R}_+$ stetig.

(5) Sei $a > 0$. Dann ist $x \mapsto a^x = \exp(x \log(a))$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

(6) Die Funktion $x \mapsto x^x = \exp(x \log(x))$ ist auf $\mathbb{R}_+$ stetig.

□

Der Zwischenwertsatz gilt nicht nur für Lipschitz-stetige Funktionen. Dieser Satz gilt allgemein für stetige Funktionen.

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \neq f(b)$.*

(1) *Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\eta \in \mathbb{R}$ mit*

$$\min\{f(a), f(b)\} < \eta < \max\{f(a), f(b)\} \tag{6.1}$$

eine reelle Zahl $\xi \in (a, b)$ mit $\eta = f(\xi)$.

(2) *Jede reelle Zahl $\eta \in \mathbb{R}$, die* (6.1) *erfüllt, heißt ein* Zwischenwert *von $f(a)$ und $f(b)$. Wir sagen dann auch, dass η zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt.*

(3) *Jeder Zwischenwert einer stetigen Funktion wird angenommen.*

Siehe Satz 17.25.

Beweis. Nach eventuellem Übergang zur negativen Funktion $-f$ können wir annehmen, dass

$$f(a) < \eta < f(b)$$

gilt. Die Menge

$$M = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \eta\}$$

ist nicht-leer. Es gilt nämlich $a \in M$. Als Teilmenge von $[a, b]$ ist M außerdem beschränkt. Nach dem Supremumsaxiom 1.34 gilt

$$(\exists \xi \in [a, b]) : \quad \xi = \sup(M) .$$

Wir zeigen im Folgenden, dass $f(\xi) = \eta$ gilt.

Zuerst nehmen wir an, dass $f(\xi) < \eta$ gilt. Dann gilt $\xi < b$. Denn aus $\xi = b$ folgt der Widerspruch

$$f(b) = f(\xi) < \eta < f(b) .$$

Wir betrachten $\epsilon = \frac{1}{2}(\eta - f(\xi)) > 0$. Wegen der Stetigkeit der Funktion f in ξ gibt es $\delta > 0$ mit

$$(\forall x \in U_\delta(\xi) \cap [a, b]) : \quad |f(x) - f(\xi)| \leq \epsilon < \eta - f(\xi) .$$

Also gilt

$$(\forall x \in U_\delta(\xi) \cap [a, b]) : \quad f(x) < \eta .$$

Wegen $\xi < b$ gibt es daher $z \in \mathbb{R}$ mit $a \leq \xi < z < b$ und $f(z) < \eta$. Folglich gilt $z \in M$. Damit erhalten wir den Widerspruch

$$z \leq \sup(M) = \xi < z .$$

Nun nehmen wir an, dass $\eta < f(\xi)$ gilt. Dann gilt $a < \xi$. Denn aus $\xi = a$ folgt der Widerspruch

$$f(a) < \eta < f(\xi) = f(a) .$$

Wir betrachten $\epsilon = \frac{1}{2}(f(\xi) - \eta) > 0$. Wegen der Stetigkeit der Funktion f in ξ gibt es $\delta > 0$ mit

$$(\forall x \in U_\delta(\xi) \cap [a, b]) : \quad |f(x) - f(\xi)| \leq \epsilon < f(\xi) - \eta .$$

Also gilt

$$(\forall x \in U_\delta(\xi) \cap [a, b]) : \quad \eta < f(x) .$$

Es folgt

$$M \cap U_\delta(\xi) = \emptyset .$$

Nach Konstruktion gilt $\xi = \sup(M)$. Mit Kriterium 1.49 folgt

$$(\exists z \in M) : \quad z \leq \xi < z + \frac{\delta}{2} .$$

Damit erhalten wir den Widerspruch

$$z \in M \cap U_{\frac{\delta}{2}}(\xi) \subseteq M \cap U_\delta(\xi) = \emptyset .$$

Weil die beiden Ungleichungen $f(\xi) < \eta$ und $\eta < f(\xi)$ auf einen Widerspruch führen, gilt nach der Trichotomie 1.4 die behauptete Gleichung $f(\xi) = \eta$. Aus $f(a) < \eta < f(b)$ folgt $\xi \in (a, b)$. Damit ist der Beweis beendet.

$\square$

7 Stetigkeit von Potenzreihen

Reelle und komplexe Potenzreihen definieren auf ihrem Konvergenzkreis stetige Funktionen. Beispiele sind die Exponentialreihe, die Cosinus-Reihe und die Sinus-Reihe. Wir betrachten lediglich Potenzreihen mit *reellen* Koeffizienten in einer *reellen* Variablen. Die Konvergenzkreise sind in diesem Fall Intervalle.

Definition 7.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(1) *Eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{7.1}$$

mit $x \in \mathbb{R}$ heißt eine Potenzreihe *in x mit den* Entwicklungskoeffizienten *a_n und dem* Entwicklungspunkt *x_0.*

(2) *Wir nennen die erweiterte reelle Zahl*

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,\infty] \tag{7.2}$$

den Konvergenzradius *der Potenzreihe* (7.1). *Dabei setzen wir*

$$0 = \frac{1}{\infty}, \quad \infty = \frac{1}{0}. \tag{7.3}$$

Die Formel (7.2) *heißt* Formel von Cauchy-Hadamard.

(3) *Im Falle $\rho \in (0,\infty]$ nennen wir das offene Intervall $U_\rho(x_0)$ den* Konvergenzkreis *der Potenzreihe* (7.1). *Siehe Definition* (6.11).

Satz 7.2 (Cauchy-Hadamard. Fortsetzung in 13.3)**.** *Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Definition* 7.1 *gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Sei $0 < \rho \le \infty$. Dann gelten die Aussagen* (1.1) *bis* (1.5).

(1.1) *Die Reihe* (7.1) *konvergiert für alle $x \in U_\rho(x_0)$ absolut.*

(1.2) *Die Funktion $f : U_\rho(x_0) \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ist in jedem Intervall $\overline{U_\gamma(x_0)}$ mit $\gamma \in (0,\rho)$ Lipschitz-stetig.

(1.3) *Die Funktion f ist auf dem Konvergenzkreis $U_\rho(x_0)$ stetig.*

(1.4) *Die Reihe* (7.1) *ist für alle $x \notin \overline{U_\rho(x_0)}$ divergent.*

(1.5) *Im Fall $0 < \rho < \infty$ wird für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| = \rho$ keine Aussage über die Konvergenz der Reihe* (7.1) *gemacht.*

(2) *Sei $\rho = 0$. Dann konvergiert die Reihe* (7.1) *nur für $x = x_0$.*

Beweis. Wir betrachten lediglich den Fall $\rho = \infty$ mit $x_0 = 0$. Die Aussagen (1.4) und (1.5) sind in diesem Fall trivial.

Nachweis von (1.1). Nach Voraussetzung gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0\,.$$

Nach dem Wurzelkriterium 4.16 konvergiert die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Nachweis von (1.2). Für $x,\, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^n - y^n = (x-y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})\,.$$

Sei $\gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt. Für alle $x,\, y \in \overline{U_\gamma(0)}$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot (x^n - y^n)\right| \\
&\qquad \le |x-y| \cdot \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}| \\
&\qquad \le |x-y| \cdot \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot n \cdot \gamma^{n-1} \\
&\qquad = |x-y| \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \sum_{n=1}^{N} |a_n| \cdot n \cdot \gamma^n\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot n \cdot \gamma^n} = \gamma \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0\,.$$

Nach dem Wurzelkriterium 4.16 konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot \gamma^n\,.$$

Für alle $x,\, y \in \overline{U_\gamma(0)}$ gilt folglich

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y| \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot \gamma^n\right)\,.$$

Also ist f auf $\overline{U_\gamma(0)}$ Lipschitz-stetig.

Nachweis von (1.3). Weil f nach (1.2) auf jedem Intervall $\overline{U_\gamma(0)}$ mit $\gamma > 0$ Lipschitz-stetig ist, folgt unter Verwendung von Satz 6.3, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Der Beweis ist damit beendet. $\square$

Beispiele 7.3. Wir untersuchen die Reihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\,,$$

$$\sin(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\, x^{2l+1}\,.$$

Diese Reihen besitzen den Konvergenzradius $\rho = \infty$, denn es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0\,.$$

Die Zahlengerade $\mathbb{R} = U_\infty(0)$ ist der Konvergenzkreis. Nach Satz 7.2 definieren diese Reihen stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$. $\square$

Beispiel 7.4. Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

besitzt den Konvergenzradius $\rho = 1$. Der Konvergenzkreis ist $U_1(0)$. Die Reihe divergiert für $|x| \geq 1$. Die Reihe stellt die auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierte und dort stetige Funktion $x \mapsto (1-x)^{-1}$ nur im offenen Intervall $U_1(0)$ dar. $\square$

Wir untersuchen nun, was in den Randpunkten des Konvergenzkreises geschieht.

Satz 7.5 (Grenzwertsatz von Abel)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ eine positive reelle Zahl derart, dass die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^n$$

konvergiert. Dann gelten die Aussagen:

(1) *Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert für jedes $x \in [0, \gamma]$.

(2) *Die Funktion* $f : [0, \gamma] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ist stetig.

Beispiel 7.6 (Mercator-Reihe. Fortsetzung in 13.6)**.** Später zeigen wir, dass die stetige Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \log(x + 1)$$

auf dem offenen Intervall $U_1(0)$ die Reihendarstellung

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$$

besitzt. Siehe Satz 13.5. Die Reihe rechter Hand heißt *Mercator-Reihe*. Nach dem Satz 7.2 von Cauchy-Hadamard definiert diese Reihe auf $U_1(0)$ eine stetige Funktion, denn es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Wir untersuchen das Verhalten in den beiden Randpunkten des Intervalles $U_1(0)$. Die Funktion f ist für $x = -1$ nicht definiert.

(1) Die Mercator-Reihe divergiert für $x = -1$, weil die harmonische Reihe divergent ist.

(2) Die Mercator-Reihe konvergiert für $x = 1$, weil die alternierende harmonische Reihe konvergent ist.

Nach dem Grenzwertsatz 7.5 von Abel definiert die Mercator-Reihe auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ eine stetige Funktion. Also gilt

$$\log(2) = \log(1 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \, .$$

Siehe 4.6 und 13.6. □

8 Kompakte Mengen und stetige Funktionen

In diesem Abschnitt geht es um die Existenz von Minima und Maxima. Nach dem *Existenzsatz von Weierstraß* nehmen stetige Funktionen auf einer nicht-leeren kompakten Menge Minimum und Maximum an. Wir beginnen mit der Erörterung einiger topologischer Grundbegriffe.

Satz und Definition 8.1. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.*

(1) *Ein Punkt $\xi \in M$ heißt* isolierter Punkt *von M, wenn*

$$(\exists \epsilon > 0): \quad U_\epsilon(\xi) \cap M = \{\xi\}.$$

Jeder isolierte Punkt der Menge M gehört zu M. Jede nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besteht aus isolierten Punkten. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ bestehen aus isolierten Punkten. Dagegen besitzt $\mathbb{Q}$ keinen einzigen isolierten Punkt.

(2) *Sei* $\mathrm{iso}(M)$ *die Menge der isolierten Punkte von M. Es gilt*

$$\mathrm{iso}(M) \subseteq M.$$

(3) *Ein Punkt $\xi \in M$ heißt* innerer Punkt *von M, wenn*

$$(\exists \epsilon > 0): \quad U_\epsilon(\xi) \subseteq M.$$

Innere Punkte von M gehören zu M. Aber es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}$, die keine inneren Punkte besitzen. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ besitzen keine inneren Punkte. Alle Punkte von $\mathbb{R}$ sind innere Punkte.

(4) *Mit* $\mathrm{int}(M)$ *bezeichnen wir die Menge der inneren Punkte von M. Die Menge* $\mathrm{int}(M)$ *heißt das* Innere *von M. Stets gelten*

$$\mathrm{iso}(M) \cap \mathrm{int}(M) = \emptyset, \quad \mathrm{iso}(M) \cup \mathrm{int}(M) \subseteq M.$$

(5) *Die Menge M heißt* offen, *wenn* $\mathrm{int}(M) = M$ *gilt. Jedes offene Intervall ist eine offene Menge. Die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind offen.*

(6) *Ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ heißt* Häufungspunkt *von M, wenn*

$$(\forall \epsilon > 0): \quad U_\epsilon(\xi) \cap (M \setminus \{\xi\}) \neq \emptyset.$$

Ein Häufungspunkt von M muss nicht in M enthalten sein. Die Menge $\mathbb{Q}$ besteht aus lauter Häufungspunkten. Aber nicht jeder Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ liegt in $\mathbb{Q}$. Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ besitzen keine Häufungspunkte. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ bestehen aus isolierten Punkten.

(7) *Sei* $\mathrm{acc}(M)$ *die Menge der Häufungspunkte von M. Es gelten*

$$\mathrm{iso}(M) \cap \mathrm{acc}(M) = \emptyset, \quad \mathrm{int}(M) \subseteq \mathrm{acc}(M) \cap M \subseteq \mathrm{acc}(M).$$

Ein isolierter Punkt ist kein Häufungspunkjt. Jeder innere Punkt ist ein Häufungspunkt. Ein Häufungspunkt von M muss nicht in M enthalten sein. Ein Punkt von M ist entweder ein isolierter Punkt oder Häufungspunkt.

(8) *Ein Punkt* $\xi \in \mathbb{R}$ *heißt* Berührpunkt *von* M*, wenn*

$$(\forall \epsilon > 0): \quad U_\epsilon(\xi) \cap M \neq \emptyset .$$

Ein Berührpunkt von M *muss nicht in* M *enthalten sein. Jeder Berührpunkt ist entweder ein isolierter Punkt oder ein Häufungspunkt. Jeder Häufungspunkt ist ein Berührpunkt.*

(9) *Mit* $\mathrm{cl}(M)$ *bezeichnen wir die Menge der Berührpunkte von* M*. Stets gelten*

$$\mathrm{iso}(M) \,\dot\cup\, \big(\mathrm{acc}(M) \cap M\big) = M ,$$

$$\mathrm{iso}(M) \subseteq M \subseteq \mathrm{cl}(M) ,$$

$$\mathrm{int}(M) \subseteq M \subseteq \mathrm{cl}(M) ,$$

$$\mathrm{int}(M) \subseteq \mathrm{acc}(M) \subseteq \mathrm{iso}(M) \,\dot\cup\, \mathrm{acc}(M) = \mathrm{cl}(M) .$$

Dabei bedeutet der Punkt über dem Vereinigungszeichen, dass die Mengen, deren Vereinigungsmenge gebildet wird, paarweise disjunkt sind. Es gelten $\mathrm{iso}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ *und* $\mathbb{Q} \neq \mathrm{acc}(\mathbb{Q}) = \mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

(10) *Die Menge* M *heißt* abgeschlossen*, wenn* $M = \mathrm{cl}(M)$ *gilt. Eine Menge, die alle ihre Häufungspunkte enthält, ist abgeschlossen. Jedes abgeschlossene Intervall ist abgeschlossen. Die Mengen* $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{Z}$ *sind abgeschlossen.*

(11) M *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $\mathrm{acc}(M) \subseteq M$ *gilt.*

(12) *Die Mengen* $\emptyset$ *und* $\mathbb{R}$ *sind offen und abgeschlossen.*

(13) *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *ist weder offen noch abgeschlossen.*

(14) M *ist genau dann offen, wenn ihr* Komplement

$$\complement M = \mathbb{R} \setminus M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin M\}$$

abgeschlossen ist.

(15) M *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $\complement M$ *offen ist.*

(16) *Ein Punkt* $\xi \in \mathbb{R}$ *heißt* Randpunkt *von* M*, wenn*

$$(\forall \epsilon > 0): \quad U_\epsilon(\xi) \cap M \neq \emptyset , \quad U_\epsilon(\xi) \cap \complement M \neq \emptyset .$$

Ein Randpunkt von M *ist zugleich ein Randpunkt von* $\complement M$*. Ein Randpunkt von* M *ist ein Berührpunkt von* M *und* $\complement M$.

(17) *Mit* $\mathrm{Rd}(M)$ *bezeichnen wir die Menge der Randpunkte von* M*. Die Menge* $\mathrm{Rd}(M)$ *heißt der* Rand *von* M.

(18) *Die Menge* M *heißt* kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Jedes Intervall* $[a, b]$ *mit* a, $b \in \mathbb{R}$ *und* $a \leq b$ *ist kompakt. Jede endliche Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *ist kompakt. Insbesondere ist die leere Menge kompakt. Die Menge* $\mathbb{R}$ *ist nicht kompakt.*

(19) Die Cantor-Menge C. *Wir beginnen die Konstruktion mit dem abgeschlossenen Einheitsintervall* $[0, 1]$*. Dies ist der* 0*-te Konstruktionsschritt.*

(i) *Im ersten Konstruktionsschritt wird das Teilintervall* $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *entfernt. Es bleibt die Menge* $J_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ *übrig.*

(ii) *Sei* $n \in \mathbb{N}$*. Im* $(n+1)$*-ten Konstruktionsschritt werden die offenen mittleren Teilintervalle der Teilintervalle aus dem* n*-ten Schritt entfernt. Es bleibt eine Vereinigungsmenge* J_{n+1} *aus* 2^{n+1} *abgeschlossenen Teilintervallen übrig.*

(iii) *Die Durchschnittsmenge*

$$\mathrm{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$$

heißt die Cantor-Menge.

Die Cantor-Menge C *ist nicht-leer und kompakt. Die Cantor-Menge* C *enthält keine isolierten Punkte. Es gelten*

$$\begin{aligned}\operatorname{acc}(\mathrm{C}) = \mathrm{C} &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{N})\colon x_n \in \{0,2\} \right\} \\ &\sim \{0,2\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Siehe 18.1 *und* 22.10.

Die Kompaktheit und die Stetigkeit sind die Schlüsselbegriffe im angekündigten Existenzsatz von Weierstraß. Um das Folgenkriterium für die Stetigkeit anwenden zu können, formulieren wir ein Folgenkriterium für die Kompaktheit.

Satz 8.2. *Eine Teilmenge* $M \subseteq \mathbb{R}$ *ist genau dann kompakt, wenn jede Folge* $(a_n) \subseteq M$ *eine konvergente Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus* M *konvergiert.*

Beweis. Wir setzen zuerst voraus, dass M *kompakt ist.* Nach Definition 8.1 ist M abgeschlossen und beschränkt. Sei $(a_n) \subseteq M$ eine beliebige Folge in M. Weil M beschränkt ist, ist auch (a_n) beschränkt. Nach dem Satz 2.24 von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{\varphi(n)})$ von (a_n). Der Grenzwert ξ der Folge $(a_{\varphi(n)}) \subseteq M$ ist ein Berührpunkt von M. Weil M abgeschlossen ist, gilt $\xi \in M$.

Nun setzen wir voraus, dass jede Folge $(a_n) \subseteq M$ *eine konvergente Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus* M *konvergiert.*

Angenommen, M ist unbeschränkt. Dann gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in M): \quad |x_n| > n\,.$$

Also kann keine Teilfolge von (x_n) konvergieren. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung über M. *Also ist* M *beschränkt.*

Sei $\xi \in \mathrm{cl}(M)$. Mit der archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 folgt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a_n \in M): \quad |\xi - a_n| < \frac{1}{n}\,.$$

Also konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen ξ. Nach Voraussetzung über M gilt $\xi \in M$. Dabei haben wir Satz 2.5 verwendet. *Also ist M auch abgeschlossen.* Der Beweis ist damit beendet. □

Eine nicht-leere kompakte Teilmenge M ist beschränkt und besitzt daher nach Satz 1.48 ein Supremum und ein Infimum. Aus den ϵ-Kriterien 1.49 und 1.51 folgt, dass die abgeschlossene Menge M die reellen Zahlen $\sup(M)$ und $\inf(M)$ enthält. Dabei wird auch von archimedischen Ordnungseigenschaft 1.37 Gebrauch gemacht. Also besitzt M ein größtes und ein kleinstes Element.

Satz 8.3. *Eine nicht-leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein ein größtes und ein kleinstes Element.*

Sobald gezeigt ist, dass stetige Bilder kompakter Mengen kompakt sind, ist der Existenzsatz von Weierstraß bewiesen. Hierbei kommen die Folgenkriterien für Kompaktheit und Stetigkeit ins Spiel.

Definition 8.4. *Seien $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge, $f: M \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und*

$$f(M) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in M): f(x) = y\}$$

das Bild *oder die* Bildmenge *von f. Die Elemente der Menge $f(M)$ heißen die* Funktionswerte *von f. Entsprechend nennen wir $f(M)$ auch die Menge der Funktionswerte von f.*

(1) *Ein Punkt $y \in f(M)$ heißt das* Maximum *von f, wenn*

$$(\forall x \in M): \quad f(x) \le y$$

gilt. Wir bezeichnen das Maximum von f mit $\max(f)$. *Mit der Bezeichnung aus* **??** *gilt*

$$\max(f) = \max(f(M))\,.$$

(2) *Sei $x_0 \in M$. Wir sagen, dass die Funktion f im Punkt x_0 ihr* Maximum annimmt*, wenn*

$$f(x_0) = \max(f)$$

gilt. In diesem Fall heißt x_0 eine Maximalstelle *von f. Eine Funktion kann mehrere Maximalstellen besitzen.*

(3) *Ein Punkt* $y \in f(M)$ *heißt das* Minimum *von* f, *wenn*

$$(\forall x \in M): \quad f(x) \geq y$$

gilt. Wir bezeichnen das Minimum von f *mit* $\min(f)$. *Es gilt*

$$\min(f) = \min(f(M)).$$

(4) *Sei* $x_0 \in M$. *Wir sagen, dass die Funktion* f *im Punkt* x_0 *ihr* Minimum annimmt, *wenn*

$$f(x_0) = \min(f)$$

gilt. In diesem Fall heißt x_0 *eine* Minimalstelle *von* f. *Eine Funktion kann mehrere Minimalstellen besitzen.*

(5) *Die Funktionswerte* $\max(f)$ *und* $\min(f)$ *heißen* globalen Extrema *von* f. *Eine Funktion kann mehrere globale Extremalstellen besitzen.*

(6) *Die Funktion* f *heißt* nach oben beschränkt, *wenn die Menge* $f(M)$ *nach oben beschränkt ist.*

(7) *Die Funktion* f *heißt* nach unten beschränkt, *wenn die Menge* $f(M)$ *nach unten beschränkt ist.*

(8) *Die Funktion* f *heißt* beschränkt, *wenn die Menge* $f(M)$ *beschränkt ist.*

Nach Definition gehören Maximum und Minimum von f, *wenn sie existieren, zur Bildmenge* $f(M)$. *Eine Funktion, die nach oben unbeschränkt ist, besitzt kein Maximim. Eine Funktion, die nach unten unbeschränkt ist, besitzt kein Minimim.*

Satz 8.5. *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}$ *eine kompakte Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *und* $f : M \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann ist die Bildmenge* $f(M) \subseteq \mathbb{R}$ *eine kompakte Teilmenge.*

Beweis. Der Satz ist trivialerweise wahr, wenn M die leere Menge ist. *Wir nehmen an, dass* $M \neq \emptyset$ *gilt.* Sei $(f(a_n)) \subseteq f(M)$ eine beliebige Folge, wobei $(a_n) \subseteq M$ gilt. Da M kompakt ist, existieren eine Teilfolge $(a_{\varphi(n)})$ und ein Punkt $\xi \in M$ mit $a_{\varphi(n)} \to \xi$. Weil f stetig ist, gilt $f(a_{\varphi(n)}) \to f(\xi)$. Damit ist der Beweis beendet. □

Aus den Sätzen 8.5 und 8.3 folgt der angekündigte Satz von Weierstraß.

Satz 8.6 (Existenzsatz von Weierstraß). *Seien* $M \subseteq \mathbb{R}$ *eine nicht-leere kompakte Teilmenge und* $f : M \to \mathbb{R}$ *eine stetige reellwertige Funktion. Dann besitzt* f *Maximum und Minimum. Insbesondere ist die Funktion* f *beschränkt.*

Der Satz von Weierstraß ist ein reiner Existenzsatz. Zur tatsächlichen Berechnung müssen andere Methoden herangezogen werden. Wenn die betrachtete Funktion nicht nur stetig sondern auch *differenzierbar* ist, hilft die Differentialrechnung weiter.

Beispiel 8.7. *Die stetige Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^2$ *besitzt in* $x = 0$ *ein globales Minimum und in* $x = 1$ *globales Maximum.*

Beispiel 8.8. *Die stetige Funktion* $f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \sin(x)$ *besitzt in* $x = \frac{3}{2}\pi$ *ein globales Minimum und in den Punkten* $x = \frac{1}{2}\pi$ *und* $x = \frac{5}{2}\pi$ *ein globales Maximum.*

Beispiel 8.9. *Die stetige Funktion* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^{-1}$ *ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Sie besitzt weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum.*

In der Integrationstheorie benötigen wir die Aussage, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig sind. Siehe den Beweis des hinreichenden Kriteriums 17.7.

Definition 8.10 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$ *eine Teilmenge. Eine Funktion* $f : A \to \mathbb{R}$ *heißt* gleichmäßig stetig, *wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(\forall x, y \in A) : \quad |x - y| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

erfüllt ist. Dabei ist auf die Reihenfolge der Quantoren zu achten. Vergleiche Definition 6.1 *der Stetigkeit.*

Satz 8.11. *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$ *eine kompakte Teilmenge. Dann ist jede stetige Funktion* $f : A \to \mathbb{R}$ *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es $\epsilon_0 > 0$ und Folgen $(x_n), (y_n) \subseteq A$ mit

$$|x_n - y_n| \leq \tfrac{1}{n}\,, \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von A gibt es eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$ von (x_n), die gegen einen Punkt $\xi \in A$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Teilfolge $(y_{\varphi(n)})$ von (y_n) gegen ξ. Wegen der Stetigkeit von f gelten

$$f(x_{\varphi(n)}) \to f(\xi)\,, \quad f(y_{\varphi(n)}) \to f(\xi)\,.$$

Es folgt

$$f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \to 0\,.$$

Dies ist der gewünschte Widerspruch. Also ist f gleichmäßig stetig. □

9 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Wenn die Funktion f in einem Punkte $a \in A$ stetig ist, so ist ihre Umkehrfunktion im Punkte $f(a)$ im Allgemeinen nicht stetig. Wesentlich für die Stetigkeit der Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist die topologische Struktur ihrer Definitionsmenge.

Im Fall kompakter Definitionsmengen folgt die Stetigkeit der Umkehrfunktion aus Folgenkriterium 8.2.

Satz 9.1 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sei injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(M) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Sei $y \in f(A)$ ein beliebiger Punkt aus dem Bild $f(A)$. Sei weiter $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $f(A)$ mit $y_n \to y$. Zu zeigen ist, dass $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(x)$ gilt.

Wegen der Injektivität von f gibt es eindeutig bestimmte $x_n \in A$ und $x \in A$ mit $y_n = f(x_n)$ und $y = f(x)$. Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$, die gegen einen Punkt $\xi \in A$ konvergiert. Die Stetigkeit von f liefert

$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(\xi)\,.$$

Weil $(y_{\varphi(n)})$ eine Teilfolge von (y_n) ist, und Grenzwerte nach Satz 2.5 einzig sind, folgt $y = f(\xi)$. Die Injektivität von f liefert $x = \xi$. Nun folgt

$$f^{-1}(y_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)} \to x = f^{-1}(y)\,.$$

Damit haben wir die Konvergenz einer Teilfolge von $(f^{-1}(y_n))$ gegen $f^{-1}(y)$ bewiesen.

Angenommen, die komplette Folge $(f^{-1}(y_n))$ konvergiert nicht gegen den Punkt $x = f^{-1}(y)$. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(x_{\psi(n)})$ von (x_n) mit

$$|x_{\psi(n)} - x| > \epsilon_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von A gibt es eine Teilfolge $(x_{\eta(n)})$ von $(x_{\psi(n)})$ und einen Punkt $\zeta \in A$ mit $x_{\eta(n)} \to \zeta$. Die Stetigkeit von f liefert

$$y_{\eta(n)} = f(x_{\eta(n)}) \to f(\zeta)\,.$$

Weil $(y_{\eta(n)})$ eine Teilfolge der konvergenten Folge (y_n) ist, gilt

$$f(\zeta) = f(x)\,.$$

Die Injektivität von f liefert $\zeta = x$. Aus der obigen Abschätzung folgt für alle Glieder der konvergenten Teilfolge $(x_{\eta(n)})$ die Abschätzung

$$|x_{\eta(n)} - \zeta| > \epsilon_0\,.$$

Dies ist Widerspruch zur Konvergenz $x_{\eta(n)} \to \zeta$. Daher gilt

$$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)\,.$$

Nach dem Folgenkriterium 6.13 ist f^{-1} stetig. □

Beispiel 9.2 (Arcus-Sinus)**.** Die Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ ist streng monoton wachsend und stetig. Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ von f ist stetig. Die Funktion arcsin heißt Hauptzweig des *Arcus-Sinus*. $\square$

Im Fall offener Definitionsmengen folgt die Stetigkeit der Umkehrfunktion aus Satz 9.1 und der Tatsache, dass jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ die Vereinigung von kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $K \subseteq U$ ist.

Satz 9.3 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Sei $y = f(x) \in f(U)$ mit $x \in U$ ein beliebiger Punkt des Bildes $f(U)$. Weil U offen ist, gibt es nach 8.1 ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq U$. Die kompakte Menge

$$K = \overline{U_\epsilon(x)} = [x - \tfrac{1}{2}\epsilon, x + \tfrac{1}{2}\epsilon]$$

ist eine echte Teilmenge von U. Die Einschränkung $f \mid K$ von f auf K erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 9.1. Offenbar gilt

$$(f \mid K)^{-1} = f^{-1} \mid f(K)\,.$$

Also ist f^{-1} auf $f(K)$ stetig. Insbesondere ist f^{-1} im Punkte y stetig. Weil $y \in f(U)$ beliebig gewählt war, ist f^{-1} auf $f(U)$ stetig. $\square$

Beispiel 9.4 (Arcus-Tangens)**.** Sei $N = \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Die Funktion $\tan : \mathbb{R}\backslash N \to \mathbb{R}$ heißt *Tangens*. Die Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tan(x)$ ist streng monoton wachsend und stetig. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Die Funktion arctan heißt Hauptzweig des *Arcus-Tangens*. $\square$

Wenn die Urbildbildmenge einer injektiven und stetigen Funktion weder offen noch kompakt ist, dann kann es vorkommen, dass die Umkehrfunktion nicht stetig ist.

Beispiel 9.5. Die Menge $A = [0, 1) \cap [2, 3]$ ist in $\mathbb{R}$ weder offen noch kompakt. Die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0, 1)\,, \\ x - 1\,, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Es gilt $f(A) = [0, 2]$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0, 2] \to A$ ist im Mittelpunkt $1 \in [0, 2]$ unstetig und sonst stetig. Die Funktion f^{-1} ist stückweise stetig. $\square$

10 Differenzierbare Funktionen

Wir beginnen die Erörterung der *Differenzierbarkeit* mit der Definition des *Grenzwertes* einer Funktion in einem Häufungspunkt. *Ableitungen* sind Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,,$$

wobei $a \in A$ ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches A einer Funktion f ist. Differentiation und Integration sind reziproke Operationen. Beide werden durch Grenzwertbildungen definiert.

Definition 10.1. *Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge, $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von A und $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Ein Punkt $b \in \mathbb{R}$ heißt der* Grenzwert *von f in a, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \setminus \{a\}) : \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

erfüllt ist. Der Punkt $b \in \mathbb{R}$ ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. Im Falle der Existenz schreiben wir

$$b = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

In der Notation des Grenzwertes werden die Zusätze $x \in A \setminus \{a\}$ oder $x \neq a$ im Allgemeinen aus Bequemlichkeit fortgelassen. Wesentlich ist die Voraussetzung, dass der Punkt a ein Häufungspunkt von A ist. Es ist nicht erforderlich, dass a zum Definitionsbereich A der Funktion f gehört.

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist in allen isolierten Punkten ihrer Definitionsmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ stetig. Wir formulieren das Folgenkriterium 6.13 um.

Satz 10.2. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Häufungspunkt $a \in A$ stetig, wenn der Grenzwert von f in a existiert und mit dem Funktionswert $f(a)$ übereinstimmt.*

Die *Ableitung* einer Funktion definieren wir als *Grenzwert von Sekantensteigungen*. Die Ableitung hat die geometrische Bedeutung einer *Tangentensteigung*. Es ist klar, dass diese Interpretation in isolierten Punkten wenig Sinn macht.

Definition 10.3. *Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in A$ ein Häufungspunkt und $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

(1) *f heißt in a* differenzierbar*, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt die Ableitung *von f in a und wird mit*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

bezeichnet.

(2) *Sind alle Punkte von A Häufungspunkte und ist f in jedem Punkt aus A differenzierbar, dann heißt f* differenzierbar *auf A.*

(3) *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt* zulässig, *wenn M nicht-leer ist und jeder Punkt von M ein Häufungspunkt ist.*

Nicht-leere offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind zulässig. Ein Intervall ist genau dann zulässig, wenn es aus mehr als einem Punkt besteht.

Beispiel 10.4 (Konstante Funktionen)**.** Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall. Die konstante Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ ist auf I differenzierbar mit $f'(a) = 0$ für alle $a \in I$. □

Beispiel 10.5 (Betragsfunktion)**.** Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $f'(a) = \operatorname{sgn}(a)$ für alle $a \neq 0$. □

Beispiel 10.6 (Logarithmus)**.** Nach Satz 3.6 gilt für alle x, $a \in \mathbb{R}_+$ die Einschließung

$$\frac{x-a}{x} \leq \log(x) - \log(a) \leq \frac{x-a}{a}\,.$$

Folglich existiert der Grenzwert

$$\log'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\log(x) - \log(a)}{x-a} = \frac{1}{a}$$

für alle $a \in \mathbb{R}_+$. Also ist der Logarithmus auf $\mathbb{R}_+$ differenzierbar. □

Beispiel 10.7 (Exponentialfunktion)**.** Nach Satz 3.8 gilt für alle $x < 1$ die Einschließung

$$x \leq \exp(x) - 1 \leq \frac{x}{1-x}\,.$$

Für alle x, $a \in \mathbb{R}$ mit $x - a < 1$ gilt daher

$$\begin{aligned}(x-a)\cdot\exp(a) &\leq (\exp(x-a) - 1)\cdot\exp(a)\\ &= \exp(x) - \exp(a)\\ &\leq \frac{x-a}{1-(x-a)}\cdot\exp(a)\,.\end{aligned}$$

Folglich existiert für alle $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\exp'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\exp(x) - \exp(a)}{x-a} = \exp(a)\,.$$

Also ist die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. □

Beispiel 10.8 (Cosinus und Sinus)**.** Cosinus und Sinus sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\cos'(a) = -\sin(a)\,, \quad \sin'(a) = \cos(a)\,.$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. Zuerst zeigen wir, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x}\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

stetig ist. Die Stetigkeit von f in $x \neq 0$ folgt aus Satz 6.15. Aus der Reihendarstellung des Sinus ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| = \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\, x^{2l} \right| \leq x^2 \cdot \exp(|x|)$$

für alle $x \neq 0$. Folglich gilt die Grenzwertformel

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Daher ist f auch in $x = 0$ stetig. Aus den Additionstheoremen folgen

$$\frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = (-1) \cdot \sin(\tfrac{1}{2}(x+a)) \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}(x-a))}{\frac{1}{2}(x-a)}\,,$$

$$\frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = (+1) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}(x+a)) \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}(x-a))}{\frac{1}{2}(x-a)}$$

für alle $x \neq a$. Siehe (3) und (4) in 5.3. Cosinus und Sinus sind auf $\mathbb{R}$ stetig. Siehe 6.4 oder 7.3 Weil die Grenzwerte auf der rechten Seite für $x \to a$ existieren, sind Cosinus und Sinus in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit den eingangs behaupteten Werten für die Ableitung. Aus der Differenzierbarkeit des Sinus kann die obige Grenzwertformel zurückgewonnen werden. Siehe dazu Beispiel 11.16. □

Wir formulieren Definition 10.3 äquivalent um. Mit Satz 10.9 lässt sich die Kettenregel 10.15 für differenzierbare Funktionen elegant beweisen.

Satz 10.9. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in A$ ein Häufungspunkt. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn es eine Funktion $\varphi : A \to \mathbb{R}$ gibt, die die beiden folgenden Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt.*

(1) *φ ist in a stetig.*

(2) $(\forall x \in A) :\ f(x) - f(a) = (x - a) \cdot \varphi(x)\,.$

Im Falle der Differenzierbarkeit in a gilt

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\,, & x \in A \setminus \{a\}\,, \\ f'(a)\,, & x = a\,. \end{cases}$$

In Bedingung (2) *wird keine explizite Auflösung nach $\varphi(x)$ vorgenommen. Eine Quotientenbildung mit dem Nenner $(x - a)$ wird daher vermieden. Dafür wird in* (1) *verlangt, dass φ in a stetig ist.*

Aus Satz 10.9 folgt, dass eine Funktion in allen Häufungspunkten stetig ist, in denen sie differenzierbar ist. In Punkten, in denen eine Funktion unstetig ist, kann sie nicht differenzierbar sein.

Satz 10.10. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in A$ ein Häufungspunkt. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, die in a differenzierbar ist, ist in a stetig.*

Beispiel 10.11 (Positive ganze Potenzen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) = na^{n-1}$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Es gilt nämlich

$$x^n - a^n = (x - a) \cdot (x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}) .$$

für alle x, $a \in \mathbb{R}$. Satz 10.9 liefert die Behauptung. Siehe Beispiel 3.4. $\square$

Beispiel 10.12 (Negative ganze Potenzen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-n}$ ist differenzierbar mit $f'(a) = -na^{-(n+1)}$ für alle $a \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} x^{-n} - a^{-n} &= (-a^{-n}x^{-n}) \cdot (x^n - a^n) \\ &= (x - a) \cdot ((-a^{-n}x^{-n}) \cdot (x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1})) \\ &= (x - a) \cdot (-1)(a^{-n}x^{-1} + a^{-(n+1)}x^{-2} + \ldots + a^{-1}x^{-n}) . \end{aligned}$$

für alle x, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Satz 10.9 liefert die Behauptung. $\square$

Beispiel 10.13. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine polynomiale Funktion mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, x^{n-k} = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit Koeffiziente $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, wobei $a_n \neq 0$ gilt. Sei ein beliebiger Punkt $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte polynomiale Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$p(x) - p(a) = (x - a) \cdot q(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die polynomiale Funktion q ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Nach Satz 10.9 ist p in a differenzierbar mit

$$p'(a) = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k)\, a_{n-k}\, x^{n-(k+1)} = q(a) .$$

Wir betrachten

$$p(x) = x^3 - x^2 + 1 , \quad p(2) = 5 , \quad p'(x) = 3x^2 - 2x , \quad p'(2) = 8 .$$

Dann gelten

$$p(x) - p(2) = x^3 - x^2 - 4 = (x - 2) \cdot q(x) , \quad q(x) = x^2 + x + 2 , \quad q(2) = 8 .$$

Der Funktionswert $p(a)$ und die Koeffizienten des Polynoms $q(x)$ sowie der Funktionswert $q(a)$ lassen sich mit dem Horner-Schema berechnen. Siehe Satz 23.1 und Beispiel 23.3. Wir heben ausdrücklich hervor, das die Polynome $p'(x)$ und $q(x)$ im Allgemeinen nicht übereinstimmen. $\square$

Wir formulieren in den folgenden beiden Sätzen 10.14 und 10.15 wichtige Differentiationsregeln.

Satz 10.14. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in A$ ein Häufungspunkt. Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die im Punkte a differenzierbar sind. Seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) (Betragsregel). *Sei $f(a) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$. Die Funktion $|f| : U_\delta(a) \cap A \to \mathbb{R}$ ist in $a \in A$ differenzierbar mit*

$$|f|'(a) = \operatorname{sgn}(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

(2) (Additivität). *Die Funktion $f + g : A \to \mathbb{R}$ ist in a differenzierbar mit*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$

(3) (Produktregel). *Die Funktion $fg : A \to \mathbb{R}$ ist in a differenzierbar mit*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

(4) (Linearität). *Die Funktion $\alpha f + \beta g : A \to \mathbb{R}$ ist in a differenzierbar mit*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)\,.$$

Die Ableitung in a ist demnach eine lineare Operation.

(5) (Quotientenregel). *Sei $g(a) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$. Siehe Satz 1.13. Die Funktion $f/g : U_\delta(a) \cap A \to \mathbb{R}$ ist in a differenzierbar mit*

$$(f/g)'(a) = \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,.$$

Beweis. Nachweis von (1). Nach Voraussetzung gilt $f(a) \neq 0$. Weil f in a stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$ gilt. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

Sei $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$. Weil f in a differenzierbar ist, gilt

$$|f|'(a) = f'(a) = (+1) \cdot f'(a) = \operatorname{sgn}(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

Sei $f(x) < 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$. Weil f in a differenzierbar ist, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} &= -\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\\ &\to -f'(a) = (-1) \cdot f'(a) = \operatorname{sgn}(f(a)) \cdot f'(a)\end{aligned}$$

für $x \to a$ mit $x \neq a$.

Damit ist die Differenzierbarkeit im Punkte a in beiden Fällen bewiesen. Die Ableitung hat den in der Betragsregel angegebenen Wert.

Nachweis von (2). Für alle $x \in A$ mit $x \neq a$ gilt

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

Die Funktionen f und g in sind a differenzierbar. Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a$. Er hat den in der Additionsregel angegebenen Wert.

Nachweis von (3). Für alle $x \in A$ mit $x \neq a$ gilt

$$\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) + f(x) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,.$$

Die Funktionen f und g in sind a differenzierbar. Insbesondere ist f in a stetig. Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a$. Er hat den in der Produktregel angegebenen Wert.

Nachweis von (4). Die Linearität folgt aus (2) und (3), weil die Ableitung einer konstanten Funktion in jedem Punkt verschwindet.

Nachweis von (5). Für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$ mit $x \neq a$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x-a} \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) \\ &\qquad = \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right\}\,. \end{aligned}$$

Die Funktionen f und g in sind a differenzierbar. Insbesondere ist g in a stetig. Außerdem gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$. Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a$. Er hat den in der Quotientenregel angegebenen Wert. Damit ist der Beweis beendet. □

Satz 10.15 (Kettenregel)**.** *Seien A, $B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen. Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subseteq B$. Es seien $a \in A$ und $b \in B$ Häufungspunkte. Es gelte $f(a) = b$. Die Funktion f sei in a differenzierbar. Die Funktion g sei in b differenzierbar. Dann ist die Komposition $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

Dabei ist $g'(f(a))$ die äußere *und $f'(a)$ die* innere *Ableitung.*

Beweis. Weil f in a und g in b differenzierbar sind gibt es $\varphi : A \to \mathbb{R}$ und $\psi : B \to \mathbb{R}$, die in a respektive b stetig sind, und die Bedingungen

$$\begin{aligned} (\forall x \in A): &\quad f(x) - f(a) = (x-a) \cdot \varphi(a)\,, \\ (\forall y \in B): &\quad g(y) - g(b) = (y-b) \cdot \psi(y)\,. \end{aligned}$$

erfüllen. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} (\forall x \in A): \quad g(f(x)) - g(f(a)) &= (f(x) - f(a)) \cdot \psi(f(x)) \\ &= (x-a) \cdot (\psi(f(x)) \cdot \varphi(x))\,. \end{aligned}$$

Weil f in a differenzierbar ist, ist f in a nach Satz 10.10 stetig. Nach Satz 6.15 und der Kettenregel 6.16 für stetige Funktionen ist die auf der Menge A definierte Funktion $x \mapsto \psi(f(x)) \cdot \varphi(x)$ in a stetig. Nach Satz 10.9 ist die Komposition $g \circ f$ in a differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(a) = \psi(f(a)) \cdot \varphi(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

Damit ist der Beweis der Kettenregel beendet. □

Beispiel 10.16. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\log(x)}{\exp(x)}$$

ist nach der Quotientenregel auf $\mathbb{R}_+$ differenzierbar mit

$$f'(a) = \frac{\log'(a)\exp(a) - \log(a)\exp'(a)}{\exp^2(a)} = \frac{1}{\exp(a)} \left\{ \frac{1}{a} - \log(a) \right\}$$

für alle $a \in \mathbb{R}_+$. □

Beispiel 10.17 (Tangens, Fortsetzung von Beispiel 9.4)**.** Der Tangens ist auf $\mathbb{R} \setminus N$ differenzierbar mit

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0\,.$$

Nach der Quotientenregel gilt nämlich

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0\,. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitung des Tangens ein zweites Mal. Seien $x, a \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{\pi}{2}$, $|a| < \frac{\pi}{2}$ und $|x - a| < \frac{\pi}{2}$ gegeben. Nach Definition gilt

$$1 + \tan(x)\tan(a) = \frac{\cos(x)\cos(a) + \sin(x)\sin(a)}{\cos(x)\cos(a)}\,.$$

Aus den Additionstheoremen für Cosinus und Sinus folgt

$$\tan(x-a) = \frac{\sin(x-a)}{\cos(x-a)} = \frac{\sin(x)\cos(a) - \cos(x)\sin(a)}{\cos(x)\cos(a) + \sin(x)\sin(a)}\,.$$

Multiplikation ergibt

$$\begin{aligned}(1 + \tan(x)\tan(a)) \cdot \tan(x-a) &= \frac{\sin(x)\cos(a) - \cos(x)\sin(a)}{\cos(x)\cos(a)} \\ &= \tan(x) - \tan(a)\,.\end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x) - \tan(a)}{x-a} &= (1 + \tan(x)\tan(a)) \cdot \frac{\tan(x-a)}{x-a} \\ &= \frac{1 + \tan(x)\tan(a)}{\cos(x-a)} \cdot \frac{\sin(a-x)}{x-a} \\ &\to \frac{1 + \tan^2(a)}{\cos(0)} \cdot 1 = 1 + \tan^2(a)\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Stetigkeit der Funktionen tan, cos, sin ausgenutzt. Also ist der Tangens in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < \frac{\pi}{2}$ differenzierbar. Wegen der π-Periodizität gilt dies für jeden Punkt der Menge $\mathbb{R} \setminus N$. □

Beispiel 10.18. Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ zur Basis a mit $\exp_a(x) = a^x = \exp(x\log(a))$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\exp_a'(x) = \exp_a(x) \cdot \log(a)\,.$$

□

Beispiel 10.19. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x = \exp(x\log(x))$ ist auf $\mathbb{R}_+$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \exp(x\log(x)) \cdot (\log(x) + 1) = x^x(\log(x) + 1)\,.$$

□

Wir verallgemeinern die beiden Beispiele 10.18 und 10.19. Gleichzeitig führen wir eine neue Schreibweise ein, um die Variable, nach der differenziert wird, von dem Punkt, in dem die Ableitung gebildet wird, zu unterscheiden.

Beispiel 10.20. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $\xi \in A$ ein Häufungspunkt. Seien $g : A \to \mathbb{R}_+$ und $h : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die im Punkte ξ differenzierbar sind. Dann ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (g(x))^{h(x)} = \exp\{h(x) \log(g(x))\}$$

in ξ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \left\{ x \mapsto (g(x))^{h(x)} \right\}'(\xi) \\ &= (g(\xi))^{h(\xi)} \cdot \left\{ h'(\xi) \log(g(\xi)) + h(\xi) \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} \right\} . \end{aligned}$$

□

11 Mittelwertsätze der Differentialrechnung

In diesem Abschnitt formulieren wir die drei Mittelwertsätze der Differentialrechnung und besprechen einige Anwendungen. Aus dem zweiten Mittelwertsatz folgen die *Regeln von Bernoulli-de'Hospital*. Wir formulieren zwei Varianten.

Wir betrachten eine differenzierbare Funktion f auf einem zulässigen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Für einen Punkt $y \in I$ gilt

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} .$$

Für einen benachbarten Punkt $x \in I$ des Punktes y gilt daher

$$f(x) - f(y) \approx f'(y) \cdot (x - y) .$$

Nach dem *ersten Mittelwertsatz* 11.1 *der Differentialrechnung* gibt es einen Punkt $\xi \in I$ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y) .$$

Daraus folgt insbesondere, dass f eine konstante Funktion ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Satz 11.1 (Erster Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann gilt*

$$(\exists \xi \in (a, b)) : \quad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) .$$

Die Ableitung $f'(\xi)$ heißt der Mittelwert *der Funktionswerte auf $[a, b]$.*

Beweis. Zunächst beweisen wir den ersten Mittelwertsatz im Spezialfall

$$f(a) = f(b) .$$

Dieser Spezialfall ist als Satz von Rolle *bekannt.* Wenn f konstant ist, gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei f nicht konstant. Nach dem Satz 8.6 von Weierstraß nimmt die stetige Funktion f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ Maximum und Minimum an. Weil f nicht konstant ist und $f(a) = f(b)$ gilt, gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$, in dem f ein Extremum besitzt. Wenn f in ξ ein Maximum annimmt, bestehen die beiden Ungleichungen

$$f'(\xi) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 ,$$

$$f'(\xi) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 .$$

Folglich gilt $f'(\xi) = 0$. Ebenso folgt $f'(\xi) = 0$, wenn f in ξ ein Minimum annimmt. Damit ist der Satz von Rolle bewiesen.

Nun betrachten wir den Fall $f(a) \neq f(b)$. Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Also gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Damit ist der Beweis des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beendet. □

Aus dem ersten Mittelwertsatz folgt das Monotoniekriterium 11.2.

Satz 11.2 (Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann sind die beiden Aussagen* (1) *und* (2) *äquivalent.*

(1) *f ist monoton wachsend.*

(2) $(\forall x \in I) : \quad f'(x) \geq 0.$

Wenn zusätzlich zu (2) *gilt, dass kein nicht-leeres offenes Intervall $J \subseteq I$ mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$ existiert, dann ist f streng monoton wachsend.*

Beispiel 11.3. Der Logarithmus ist nach Satz 11.2 wegen

$$\log'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend. □

Beispiel 11.4. Die Exponentialfunktion ist nach Satz 11.2 wegen

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. □

Beispiel 11.5. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, denn die Ableitung von f ist nicht-negativ und verschwindet nur im Nullpunkt: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. □

Beispiel 11.6. Die Schränkungsfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \frac{x}{1 + |x|}\,, \quad h'(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^2}$$

ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. □

Aus 10.4 und dem ersten Mittelwertsatz 11.1 ergibt sich eine Kennzeichung konstanter differenzierbarer Funktionen.

Satz 11.7. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann sind die beiden folgenden Aussagen* (1) *und* (2) *äquivalent.*

(1) *f ist konstant.*

(2) $(\forall x \in I): \quad f'(x) = 0.$

Aus den Sätzen 10.6, 10.7 und 11.7 folgen Kennzeichungen von Logarithmus und Exponentialfunktion durch *Anfangswertprobleme*.

Satz 11.8. *Der Logarithmus* $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *ist die einzige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, die die beiden folgenden Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt.*

(1) $f(1) = 0\,.$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R}_+): \quad f'(x) = 1/x\,.$

Beweis. Der Logarithmus hat die genannten Eigenschaften. Wir betrachten die differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - \log(x)$. Dann gilt

$$g'(x) = f'(x) - \log'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Nach Satz 11.7 gilt

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}_+): \quad g(x) = f(x) - \log(x) = c\,.$$

Wegen $f(1) = 0$ gilt $c = 0$. Damit ist der Beweis beendet. □

Satz 11.9. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist die einzige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die beiden folgenden Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt.*

(1) $f(0) = 1\,.$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R}): \quad f'(x) = f(x)\,.$

Beweis. Die Exponentialfunktion hat die genannten Eigenschaften. Wir betrachten die differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) \cdot \exp(-x)$. Es gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \cdot \exp(-x) + f(x) \cdot \exp'(-x) \cdot (-1) \\ &= f(x) \cdot \exp(-x) - f(x) \cdot \exp(-x) = 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 11.7 gilt

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}): \quad g(x) = f(x) \cdot \exp(-x) = c\,.$$

Wegen $f(0) = 1$ gilt $c = 1$. Damit ist der Beweis beendet. □

Cosinus und Sinus lassen sich durch zwei gekoppelte Anfangswertprobleme kennzeichnen. Wir haben Cosinus und Sinus in Abschnitt 4 als Real- respektive Imaginärteil der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \exp(ix)$ definiert.

Satz 11.10. *Die Funktion* $x \mapsto \exp(ix)$ *ist die einzige differenzierbare Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *die beiden folgenden Eigenschaften* (1) *und* (2) *erfüllt.*

(1) $f(0) = 1$.

(2) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad f'(x) = if(x)$.

Satz 11.11. *Die Funktionen* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind die einzigen differenzierbaren Funktionen* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *die die Eigenschaften* (1) *bis* (4) *erfüllen.*

(1) $f(0) = 1$.

(2) $g(0) = 0$.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad f'(x) = -g(x)$.

(4) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad g'(x) = f(x)$.

Beweis. Cosinus und Sinus besitzen die genannten Eigenshaften. Die differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $h(x) = f(x) + ig(x)$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 11.10. Folglich gilt

$$\exp(ix) = f(x) + ig(x)\,, \quad f(x) \in \mathbb{R}\,, \quad g(x) \in \mathbb{R}\,.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist der Beweis beendet. □

Wir ziehen eine weitere Konsequenz aus Satz 11.7.

Satz und Definition 11.12. *Seien* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein zulässiges Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine beliebige Funktion.*

(1) *Eine differenzierbare Funktion* $F : I \to \mathbb{R}$ *heißt eine* Stammfunktion *von* f *auf* I, *wenn die Bedingung*

$$(\forall x \in I) : \quad F'(x) = f(x)$$

erfüllt ist.

(2) *Mit* F *ist auch jede Funktion* $F + c$, *wobei* $c \in \mathbb{R}$ *eine beliebige reelle Konstante ist, eine Stammfunktion von* f. *Dies sind die einzigen Stammfunktion von* f *auf* I, *wenn es welche gibt.*

Beispiele 11.13.

(1) $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}_+$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$.

(2) $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = x \cdot (\log(x) - 1)$ ist auf $\mathbb{R}_+$ eine Stammfunktion von $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

(3) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von sich selber.

(4) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(5) Der negative Cosinus $-\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(6) Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die polynomiale Funktion mit

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \,.$$

Dann ist die polynomiale Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu + 1}\, x^{\nu+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2}\, x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} \,.$$

auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$.

(7) $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

□

Der erste Mittelwertsatz lässt sich in eine Form bringen, die für die Berechnung von Grenzwerten nützlich ist. Siehe die Sätze 11.15 und 11.19.

Satz 11.14 (Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind. Außerdem gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gelten die Aussagen* (1) *und* (2)

(1) $g(a) \neq g(b)$.

(2) *Es existiert ein Punkt $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \,.$$

Beweis. Wir wenden den ersten Mittelwertsatz 11.1 auf $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ an und erhalten $g(a) \neq g(b)$, da $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt. Die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

ist auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Offenbar gelten

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}\,,$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Also gilt $h(a) = h(b)$. Nach dem ersten Mittelwert 11.1 gibt es daher einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)\,.$$

Der Beweis ist damit beendet. $\square$

Aus dem zweiten Mittelwertsatz folgen die *Regeln von Bernoulli-de'Hospital*. Wir formulieren zwei Varianten. Satz 11.15 ermöglicht es in vielen Fällen, Grenzwerte vom Typ 0/0 zu berechnen. Siehe die Beispiele 11.16, 11.17 und 11.18. Die zweite Variante geben wir in Satz 11.19. Eventuell müssen die Regeln von Bernoulli-de'Hospital mehrfach angewendet werden.

Satz 11.15 (Regel von Bernoulli-de'Hospital)**.** *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall, $a \in I$ und $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar sind und die Bedingungen* (1), (2), (3) *erfüllen.*

(1) $f(a) = g(a) = 0\,.$

(2) $(\forall x \in I \setminus \{a\}) :\ g'(x) \neq 0\,.$

(3) *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen (4) *und* (5)*.*

(4) *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

(5) *Es gilt*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Beweis. Nach dem zweiten Mittelwertsatz 11.14 gibt es zu jedem $x \in I \setminus \{a\}$ einen Punkt $\xi(x) \in I \setminus \{a\}$, der zwischen a und x liegt und

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$$

erfüllt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{a\}$ eine beliebige Folge mit $x_n \to a$. Solche Folgen gibt es, da $a \in I$ nach Voraussetzung ein Häufungspunkt von I ist. Wir betrachten die Folge $(\xi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{a\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt $\xi(x_n)$ zwischen a und x_n und erfüllt

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi(x_n))}{g'(\xi(x_n))}\,.$$

Offenbar gilt $\xi(x_n) \to a$. Nach Voraussetzung (2) existieren die Quotienten auf der rechten Seite. Nach Voraussetzung (3) existiert der Grenzwert dieser Quotienten für $n \to \infty$. Also konvergieren die Quotienten auf der linken Seite für $n \to \infty$. Weil die Folge $(x_n) \subseteq I \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ beliebig gewählt war, folgt die Gültigkeit der Aussagen (4) und (5). Der Beweis ist damit beendet. □

Beispiel 11.16. Seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x) = \sin(x)\,, \quad g(x) = x\,, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos(x)}{1} = \cos(x)\,.$$

Der Satz 11.15 liefert die Grenzwertformel

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Diese Grenzwertformel haben wir bereits in Beispiel 10.8 mit einer anderen Methode bewiesen. Die Anwendung der Regel von Bernoulli-de'Hospital setzt allerdings die Differenzierbarkeit des Sinus voraus. □

Beispiel 11.17. Seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x) = 1 - \cos(x)\,, \quad g(x) = x^2\,.$$

Zweimaliges Anwenden von Satz 11.15 liefert

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Wir kommen mit einer einmaligen Anwendung aus, wenn wir die Grenzwertformel aus Beispiel 11.16 beachten. □

Beispiel 11.18. Dreimaliges Anwenden von 11.15 ergibt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Wir kommen mit einer einmaligen Anwendung aus, wenn wir die Grenzwertformel aus Beispiel 11.17 beachten. □

Die folgende Variante der Regel von Bernoulli-de'Hospital kann oft erfolgreich zur Berechnung von Grenzwerten des Types ∞/∞ herangezogen werden. Siehe Beispiel 11.20. Eventuell muss Satz 11.19 mehrmals angewendet werden. Ein analoger Satz gilt auch für rechtsseitige Grenzwerte.

Satz 11.19 (Variante der Regel von Bernoulli-de'Hospital)**.** *Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Seien $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, die die Bedingungen* (1), (2), (3) *erfüllen.*

(1) *Es existiert der uneigentliche Grenzwert*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} g(x) = \infty\,.$$

(2) $(\forall x \in (a,b)) :\ g'(x) \neq 0\,.$

(3) *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen (4) *und* (5).

(4) *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

(5) *Es gilt*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Die Grenzwerte in (3), (4), (5) *sind in dieser Variante der Regel von Bernoulli-de'Hospital als eigentliche Grenzwerte in $\mathbb{R}$ gemeint.*

Beweis. Nach Voraussetzung (3) gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha = \lim_{\substack{x \to a \\ a < x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Daher gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ mit $a + \delta(\epsilon) < b$ derart, dass

$$(\forall x \in (a, a + \delta(\epsilon)) : \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| \leq \epsilon$$

gilt. Wegen (1) und (2) kann es außerdem so eingerichtet werden, dass g auf $(a, a + \delta(\epsilon))$ positiv und streng monoton fallend ist. Nach dem zweiten Mittelwertsatz 11.14 gibt zu $x \in (a, a + \delta(\epsilon))$ einen Punkt $\xi(x)$, der zwischen den Punkten a und x liegt und

$$\frac{f(x) - f(a + \delta(\epsilon))}{g(x) - g(a + \delta(\epsilon))} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$$

erfüllt. Daher gilt

$$(\forall x \in (a, a + \delta(\epsilon)) : \quad \left| \frac{f(x) - f(a + \delta(\epsilon))}{g(x) - g(a + \delta(\epsilon))} - \alpha \right| \leq \epsilon \,.$$

Umformen ergibt die Einschließung

$$(\alpha - \epsilon) \left(1 - \frac{g(a + \delta(\epsilon))}{g(x)} \right) \leq \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a + \delta(\epsilon))}{g(x)} \leq (\alpha + \epsilon) \left(1 - \frac{g(a + \delta(\epsilon))}{g(x)} \right) \,.$$

Wegen (1) erhalten wir nach eventueller Verkleinerung von $\delta(\epsilon)$ zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta^*(\epsilon) > 0$ mit

$$(\forall x \in (a, a + \delta^*(\epsilon)) : \quad \alpha - 2\epsilon \leq \frac{f(x}{g(x)} \leq \alpha + 2\epsilon \,.$$

Damit sind die Aussagen (4) und (5) bewiesen. □

Beispiel 11.20. Seien f, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x) = -\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) \,, \quad g(x) = x^{-1} \,, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(-1) \cdot x^{-1}}{(-1) \cdot x^{-2}} = x \,.$$

Mit Satz 11.19 erhalten wir

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 < x}} x \log(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 < x}} x \log\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \,.$$

Sei $0 < x$. Wir setzen $y = x^{-1}$. Dann sind die beiden Grenzübergänge $y \to \infty$ und $x \to 0$ äquivalent. Folglich gilt

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\log(y)}{y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 < x}} x \log\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \,.$$

□

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges kompaktes Intervall. Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Wenn die Ableitung von f in jedem Punkt aus I stetig ist, dann kann der erste Mittelwertsatz in Form einer Ungleichung ausgesprochen werden. Dies folgt aus dem Satz 8.6 von Weierstraß. Diese Ungleichung bedeutet insbesondere, dass f Lipschitz-stetig ist.

Definition 11.21. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine zulässige Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die Funktion $f' : A \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ heißt die* erste Ableitung *oder die* Ableitung *von f. Wir schreiben*

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(1)}(a) = f'(a)$$

für $a \in A$. Wenn f' auf A stetig ist, dann heißt f auf A stetig differenzierbar*. Siehe Definition* 13.1*.*

Satz 11.22 (Dritter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$(\forall x, y \in [a, b]) : \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \cdot \sup_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)| .$$

Das bedeutet insbesondere, dass f auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig ist.

Beispiele 11.23. Die Aussagen über die Lipschitz-Stetigkeit von log, exp, cos, sin auf bestimmten unbeschränkten Intervallen in den Sätzen 3.6, 3.8 und 5.3 lassen sich aus Satz 11.22 zurückgewinnen. □

12 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Wenn die Funktion f in einem Häufungspunkt $a \in$ differenzierbar ist, so ist ihre Umkehrfunktion in $f(a)$ im Allgemeinen weder stetig noch differenzierbar.

Satz 12.1 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion in einem Punkt)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in A$ ein Häufungspunkt. Die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ sei injektiv und in a differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ sei in $b = f(a)$ stetig. Dann gelten:*

(1) *b ist ein Häufungspunkt von $f(A)$.*

(2) *f^{-1} ist in b differenzierbar.*

(3) $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Beweis. Nachweis von (1). Weil a ein Häufungspunkt von A ist, gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq A \backslash \{a\}$ mit $x_n \to a$. Weil f injektiv und in a stetig ist, ist $(f(x_n)) \subseteq A \setminus \{f(a)\}$ eine Folge mit $f(x_n) \to f(a) = b$. Also ist b ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches $f(A)$ der Umkehrfunktion f^{-1}.

Nachweis von (2) *und* (3). Weil f in a differenzierbar ist, gibt es nach Satz 10.9 eine Funktion $\varphi : A \to \mathbb{R}$ mit

$$(\forall x \in A): \quad f(x) - f(a) = (x - a) \cdot \varphi(x)\,,$$

die in a stetig ist. Außerdem gilt $f'(a) = \varphi(a)$. Weil f injektiv ist, folgt

$$(\forall y \in f(A)): \quad y - b = (f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) \cdot \varphi(f^{-1}(y))\,. \tag{*}$$

Nach Voraussetzung ist f^{-1} in b stetig. Weil außerdem φ in a stetig ist, ist die Komposition $\varphi \circ f^{-1}$ in b stetig. Es gilt

$$\varphi(f^{-1}(b)) = \varphi(f^{-1}(f(a))) = \varphi(a) = f'(a) \neq 0\,.$$

Also existiert ein $\delta > 0$ mit $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$ für alle $y \in U_\delta(b) \cap f(A)$. Die Funktion $1/(\varphi \circ f^{-1}) : U_\delta(b) \cap f(A) \to \mathbb{R}$ ist in b stetig. Aus (*) folgt, dass f^{-1} in b differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(b))} = \frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Dabei haben wir Satz 10.9 angewendet. Damit ist der Beweis beendet. □

Auf die Voraussetzung der Injektivität kann in Satz 12.1 *nicht* verzichtet werden. Aus dem Nichtverschwinden der Ableitung in *einem* Punkt kann nicht auf die Umkehrbarkeit der Funktion in einer Umgebung dieses Punktes geschlossen werden.

Beispiel 12.2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die differenzierbare Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cdot \cos(\pi/x)\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Es gilt

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 \cdot \cos(\pi/x)}{x} = \lim_{x \to 0} (1 + x \cdot \cos(\pi/x)) = 1\,.$$

Die Funktion f ist in keiner Umgebung des Nullpunktes injektiv. □

Mit Satz 9.3 kann Satz 12.1 verbessert werden, so dass die Stetigkeit der Umkehrfunktion nicht mehr vorausgesetzt werden muss.

Satz 12.3 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres offenes Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die drei Eigenschaften* (1), (2), (3) *besitzt.*

(1) *f ist injektiv.*

(2) *f ist differenzierbar.*

(3) $(\forall x \in I) : \quad f'(x) \neq 0.$

Unter diesen Voraussetzungen existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ und es gelten die Aussagen (4), (5), (6)*.*

(4) *$f(I)$ ist ein nicht-leeres offenes Intervall.*

(5) *f^{-1} ist differenzierbar.*

(6) $(\forall x \in I) : \quad (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}.$

Aus dem Monotoniekriterium 11.2 *folgt, dass die Voraussetzung* (1) *wegen* (3) *automatisch erfüllt ist.*

Beispiel 12.4 (Fortsetzung in 13.8)**.** Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Siehe 9.2 und 10.17. □

Auf die Voraussetzung (3) kann in Satz 12.3 nicht verzichtet werden.

Beispiel 12.5. Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2$ ist injektiv, aber die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \sqrt{|x|}$ ist nur für $x \neq 0$ differenzierbar. □

13 Differenzierbarkeit von Potenzreihen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Differenzierbarkeitseigenschaften von Potenzreihen. Zuerst ergänzen wir die Definitionen 10.3 und 11.21. Wir führen die höheren Ableitungen induktiv ein. Aus Gründen der Bequemlichkeit fassen wir eine Funktion mit einer zulässigen Definitionsmenge als nullte Ableitung auf.

Definition 13.1. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine zulässige Menge, $a \in A$ ein beliebiger Punkt und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

(0) *Wir nennen f die* nullte *Ableitung von f und setzen $f^{(0)} = f$.*

(1) *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}$ existiert und in a differenzierbar ist, dann heißt f in a* $(n+1)$-mal differenzierbar. *Entsprechend heißt der Grenzwert*

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{x - a}$$

die $(n+1)$-te Ableitung *von f in a. Die Funktion f heißt* $(n+1)$-mal differenzierbar, *wenn der Grenzwert $f^{(n+1)}(\xi)$ für alle $\xi \in A$ existiert. In diesem Fall nennen wir $f^{(n+1)} : A \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f^{(n+1)}(x)$ die* $(n+1)$-te Ableitung *von f.*

(2) *Wenn $f^{(n)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, dann heißt f in a* unendlich oft differenzierbar.

(3) *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn die n-te Ableitung $f^{(n)}$ existiert und stetig ist, dann nennen wir f* n-mal stetig differenzierbar. *Demnach ist f genau dann nullmal stetig differenzierbar, wenn f stetig ist.*

(4) *Wir nennen f* unendlich oft stetig differenzierbar, *wenn f für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ n-mal stetig differenzierbar ist.*

(5) *Wir verwenden die Schreibweisen*

$$f' = f^{(1)}\,,\ f'' = f^{(2)}\,,\ f''' = f^{(3)}\,,\ \ldots\,,$$

$$f'(a) = f^{(1)}(a)\,,\ f''(a) = f^{(2)}(a)\,,\ f'''(a) = f^{(3)}(a)\,,\ \ldots\,.$$

Beispiel 13.2. Die Schränkungsfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$h'(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^2}$$

und auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$h''(x) = -\frac{2\mathrm{sgn}(x)}{(1 + |x|)^3}\,.$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist h unendlich oft stetig differenzierbar. □

Nun ergänzen wir den Satz 7.2 von Cauchy-Hadamard um Differenzierbarkeitsaussagen.

Satz 13.3 (Cauchy-Hadamard. Fortsetzung von 7.2)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt. Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

besitze einen von Null verschieden Konvergenzradius ρ. Es gilt also $\rho \in (0, \infty]$. Außerdem gelten die folgenden Aussagen.

(1) *Die Funktion $f : U_\rho(x_0) \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{13.1}$$

ist unendlich oft stetig differenzierbar. Es gilt $f(x_0) = a_0$.

(2) *Die Ableitung $f' : U_\rho(x_0) \to \mathbb{R}$ besitzt die Reihendarstellung*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \,. \tag{13.2}$$

Es gilt $f'(x_0) = a_1$. Die Reihe (13.2) *entsteht aus der Reihe* (13.1) *durch gliedweises Differenzieren.*

(3) *Die Funktion $F : U_\rho(x_0) \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \tag{13.3}$$

ist eine Stammfunktion von f mit $F(x_0) = 0$. Die Reihe (13.1) *entsteht aus der Reihe* (13.3) *durch gliedweises Differenzieren. (In der Sprechweise des Abschnittes* 17 *über das Riemann-Integral können wir auch sagen, dass die Reihe* (13.3) *aus der Reihe* (13.1) *durch gliedweises Integrieren entsteht.)*

(4) *Die drei Reihen* (13.1)*,* (13.2) *und* (13.3) *besitzen denselben von Null verschiedenen Konvergenzradius ρ.*

Beispiele 13.4 (Exponentialfunktion, Cosinus, Sinus)**.** Wir verwenden die Reihendarstellungen aus 4.25 und 5.1. Die Exponentialfunktion, der Cosinus und der Sinus sind nach Satz 13.3 unendlich oft differenzierbar. Ihre Ableitungen ergeben sich durch gliedweises Differenzieren. Wir betrachten zuerst die Exponentialfunktion.

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \,.$$

Nun berechnen wir die Ableitung des Cosinus.

$$\cos'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2k}{(2k)!}\, x^{2k-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = -\sin(x)\,.$$

Wir berechnen abschließend die Ableitung des Sinus.

$$\sin'(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \cdot (2l+1)}{(2l+1)!}\, x^{2l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!}\, x^{2l} = \cos(x)\,.$$

Siehe 10.7 und 10.8. $\square$

Satz 13.5 (Reihendarstellungen des Logarithmus)**.** *Die Funktion* $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *ist unendlich oft differenzierbar mit*

$$\log'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Außerdem gelten die folgenden Aussagen.

(1) *Für alle* $x \in \mathbb{R}_+$ *mit* $|x-1| < 1$ *gilt die Reihendarstellung*

$$\log'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n\,. \tag{13.4}$$

Der Konvergenzradius der Reihe (13.4) *ist gleich* 1*.*

(2) *Für alle* $x \in \mathbb{R}_+$ *mit* $|x-1| < 1$ *gilt*

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, (x-1)^n\,. \tag{13.5}$$

Der Konvergenzradius der Reihe (13.5) *ist gleich* 1*.*

(3) *Für alle* $\xi \in \mathbb{R}_+$ *und alle* $x \in \mathbb{R}_+$ *mit* $|x-\xi| < \xi$ *gilt*

$$\log(x) = \log(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\xi^n}\, (x-\xi)^n\,. \tag{13.6}$$

Der Konvergenzradius der Reihe (13.6) *ist gleich* ξ*.*

Beweis. Die Formel von Cauchy-Hadamard liefert die angegebenen Konvergenzradien. Siehe 7.1. Die Reihendarstellung (13.4) ergibt sich aus der Summenformel für die geometrische Reihe. Mit Satz 13.3 folgt aus (2) aus (1). Für alle ξ, $x \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\left|\frac{x}{\xi} - 1\right| < 1 \Leftrightarrow |x-\xi| < \xi\,.$$

Aus (2) folgt daher

$$\log(x) - \log(\xi) = \log\left(\frac{x}{\xi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{\xi} - 1\right)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\xi^n} (x-\xi)^n .$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Beispiel 13.6 (Mercator-Reihe. Fortsetzung von 7.6)**.** Eine Umformung von Reihe (13.5) ergibt die *Mercator-Reihe*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \dots \tag{13.7}$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und dem Konvergenzradius $\rho = 1$. Die Mercator-Reihe war bereits Issac Newton bekannt.

Für $x = 1$ liefert die Mercator-Reihe die alternierende harmonische Reihe. Nach dem Grenzwertsatz 7.5 von Abel kann $\log(2)$ durch die alternierende harmonische Reihe dargestellt werden. Siehe Beispiel 7.6. Allerdings ist die näherungsweise Berechnung von $\log(2)$ mit Hilfe der alternierenden harmonischen Reihe außerordentlich unpraktisch. Wir behandeln in 13.7 eine Reihendarstellung, die $\log(2)$ mit erheblich weniger Aufwand zu berechnen gestattet.

Beispiel 13.7. Wir ersetzen in der Mercator-Reihe (13.7) die Variable x durch $-x$ und erhalten die Reihe

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots . \tag{13.8}$$

Die Subtraktion beider Reihen ergibt

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} . \tag{13.9}$$

Die in Rede stehenden drei Reihen besitzen denselben Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und den denselben Konvergenzradius $\rho = 1$. Entwickeln der Reihe (13.9) bis einschließlich $n = 3$ ergibt die Näherung

$$\log(2) = \log\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) \approx 2\left\{\frac{1}{1\cdot 3^1} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7}\right\}$$
$$= \frac{53056}{76545} = 0.69313475 73^4_3$$

mit vier gesicherten Nachkommastellen für $\log(2)$. Es gilt

$$\log(2) = 0.6931471805^6_5$$

mit zehn gesicherten Nachkommastellen. □

Satz 13.8 (Arcus-Tangens-Reihe. Fortsetzung von 12.4)**.** *Die Funktion* arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist unendlich oft stetig differenzierbar mit*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Außerdem gelten die folgenden Aussagen:

(1) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < 1$ *gilt die Reihendarstellung*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,. \tag{13.10}$$

(2) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < 1$ *gilt die Reihendarstellung*

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\,. \tag{13.11}$$

(3) *Die beiden Reihen* (13.10) *und* (13.11) *besitzen denselben Entwicklungspunkt* $x_0 = 0$ *und denselben Konvergenzradis* $\rho = 1$*.*

Aus der Reihenentwicklung 13.11 und dem Grenzwertsatz 7.5 von Abel folgt die berühmte Reihendarstellung von $\frac{\pi}{4}$, die Leibniz gegeben hat.

Beispiel 13.9 (Leibniz-Reihe. Fortsetzung von 4.7)**.** Es gilt

$$\cos(\tfrac{\pi}{4}) = \sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,, \quad \tan(\tfrac{\pi}{4}) = 1\,.$$

Die Leibniz-Reihe ist konvergent mit

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots\,.$$

□

Wir formulieren den wichtigen Identitätssatz für Potenzreihen.

Satz 13.10 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *reelle Folgen. Sei* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Die Reihen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\,, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

mögen Konvergenzradien in $(0,\infty]$ *besitzen. Dann sind die folgenden beiden Aussagen* (1) *und* (2) *äquivalent.*

(1) *Im Durchschnitt beider Konvergenzkreise existiert eine Folge* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit*

(1.1) $\xi_k \to x_0$,

(1.2) $(\forall k \in \mathbb{N}):\quad \xi_k \neq x_0\,,$

(1.3) $(\forall k \in \mathbb{N}):\quad f(\xi_k) = g(\xi_k)\,.$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}_0):\quad a_n = b_n\,.$

Wir haben wichtige Funktionen entweder durch Potenzreihen definiert oder aus ihren grundlegenden Eigenschaften Potenzreihendarstellungen gewonnen. Der *Satz von Taylor* eröffnet die Möglichkeit einer systematischen Berechnung von Potenzreihendarstellungen. Eine hinreichende Bedingung für die Darstellung einer Funktion durch ihre *Taylor-Reihe* gibt der *Darstellungssatz von Abel.* Der Satz von Taylor folgt aus dem ersten Mittelwertsatzes. Umgekehrt enthält der Satz von Taylor den ersten Mittelwertsatz als Spezialfall.

Satz 13.11 (Satz von Taylor)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres offenes Interval. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei n-mal stetig differenzierbar. Seien x, $x_0 \in I$ mit $x \neq x_0$ gegeben. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{f^n(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^n\,. \tag{13.12}$$

Die Formel (13.12) *heißt die* Formel von Taylor*. Für $n = 1$ ergibt sich der erste Mittelwertsatz* 11.1 *als Spezialfall.*

Beweis. Es gibt genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + c\,\frac{(x - x_0)^n}{n!}\,.$$

Diese Gleichung kann nämlich nach c eindeutig aufgelöst werden. Zu zeigen bleibt, dass es $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ mit

$$f^{(n)}(\xi) = c$$

gibt. Dazu betrachten wir die Hilfsfunktion $g\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(t - x_0)^k + c\,\frac{(t - x_0)^n}{n!} + f(t)\,.$$

Es gilt $g(x) = 0$. Außerdem gilt

$$g^{(k)}(x_0) = 0$$

für $k = 0, \ldots, n-1$. Wir wenden den Satz von Rolle mehrfach an. Siehe Beweis von Satz 11.1. Wir setzen $\xi_0 = x$. Wegen

$$g(\xi_0) = g(x_0) = 0$$

gibt es ξ_1 zwischen ξ_0 und x_0 mit

$$g^{(1)}(\xi_1) = 0\,.$$

Wegen

$$g^{(1)}(x_0) = g^{(1)}(\xi_1) = 0$$

gibt es ξ_2 zwischen x_0 und ξ_1 mit

$$g^{(2)}(\xi_2) = 0\,.$$

Wir setzen $\xi_0 = x$. Wiederholung liefert Punkte $\xi_1, \ldots \xi_n$ mit

$$\min\{\xi_{k-1}, x_0\} < \xi_k < \max\{\xi_{k-1}, x_0\}\,, \quad g^{(k)}(\xi_k) = 0$$

für $k = 1, \ldots, n$. Nun setzen wir $\xi = \xi_n$. Nach Konstruktion liegt ξ zwischen x und x_0. Nach Konstruktion von g gilt

$$0 = g^{(n)}(\xi) = 0 + c - f^{(n)}(\xi)\,.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Definition 13.12 (Taylor-Polynom, Taylor-Reihe)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Sei weiter $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall, $x_0 \in I$ ein Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

(1) *Sei f in x_0 n-mal differenzierbar. Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ heißt*

$$T_m f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k$$

das m-te Taylor-Polynom *von f mit dem Entwicklungspunkt x_0.*

(2) *Sei f in x_0 unendlich oft differenzierbar. Dann heißt*

$$Tf(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k$$

die Taylor-Reihe *von f mit dem Entwicklungspunkt x_0. Den Konvergenzradius von $Tf(x, x_0)$ bezeichnen wir mit $\rho(f, x_0)$.*

Satz 13.13 (Darstellungssatz von Abel)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion, die die Bedingung*

$$(\exists \delta > 0)(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in U_\delta(x_0) \cap I) : \quad \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}\,\delta^n \leq K$$

erfüllt. Dann konvergiert die Taylor-Reihe $Tf(x, x_0)$ von f um x_0 für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ absolut gegen $f(x)$. Das heißt, es besteht auf $U_\delta(x_0) \cap I$ die Reihendarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k\,.$$

Für den Konvergenzradius $\rho(f, x_0)$ von $Tf(x, x_0)$ gilt $\delta \leq \rho(f, x_0)$.

Beispiele 13.14. Die Reihendarstellungen für die Exponentialfunktion, den Cosinus und den Sinus in 4.25 und 5.1 sind die Taylor-Reihen um $x_0 = 0$. $\square$

Es gibt aber unendlich oft differenzierbare Funktionen, die nicht durch ihre Taylor-Reihe um einen gegebenen Entwicklungspunkt dargestellt werden.

Beispiel 13.15. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{|x|}\right), & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft stetig differenzierbar. Weil $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, stellt die Taylor-Reihe $Tf(x, 0)$ die Nullfunktion dar. Es gilt $\rho(f, 0) = \infty$. Aber die Reihe $Tf(x, 0)$ stellt die Funktion f nur in Nullpunkt dar. $\square$

14 Lokale und globale Extrema

Nach dem Satz von Weierstraß nimmt eine stetige reelle Funktion auf einer nicht-leeren kompakten Menge Maximum und Minimum an. Dieser Satz ist ein reiner Existenzsatz. Er macht keinerlei Aussage über die Lage der Extremalstellen. Hier eröffnet die Differentialrechung neue Möglichkeiten.

Bereits im Beweis des ersten Mittelwertsatzes haben wir ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema in inneren Punkten bewiesen. Der Mittelwertsatz und der Satz von Taylor liefern hinreichende Kriterien. Die isolierte Punkte und Randpunkte bedürfen einer eigenen Untersuchung.

Die globalen Extrema haben wir bereits in Definition 8.4 eingeführt. In 14.1 definieren wir die lokalen Extrema. Weil lokale Vergleiche der Funktionswerte vorgenommen werden, setzen wir voraus, dass Extremalstellen Häufungspunkte sind.

Definition 14.1. *Seien $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

(1) *Ein Häufungspunkt $x_0 \in M$ heißt eine* lokale Maximalstelle *von f, wenn*

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0) \cap M) : \quad f(x) \leq f(x_0)$$

gilt. Entsprechend heißt der Funktionswert $f(x_0)$ ein lokales Maximum *von f. Wir sagen dann, dass f in x_0 ein globales Maximum* besitzt *oder* annimmt.

(2) *Ein Häufungspunkt $x_0 \in M$ heißt eine* lokale Minimalstelle *von f, wenn*

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0) \cap M) : \quad f(x) \geq f(x_0)$$

gilt. Entsprechend heißt der Funktionswert $f(x_0)$ ein lokales Minimum *von f. Wir sagen dann, dass f in x_0 ein globales Minimum* besitzt *oder* annimmt.

Lokale Maxima und lokale Minima werden auch als lokale Extrema *bezeichnet. Globale Extrema in Häufungspunkten sind gleichzeitig lokale Extrema. Es gibt Funktionen, die zwar lokale aber keine globalen Extrema besitzen. Lokale und globale Extrema bezeichnen wir als* Extrema.

Im Beweis des ersten Mittelwertsatzes 11.1 hat sich bereits ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema in *inneren* Punkten ergeben. Wir führen den Beweis für eine etwas allgemeinere Situation.

Satz 14.2 (Fermat). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge und $a \in A$ ein innerer Punkt. Die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ sei in a differenzierbar. Wenn f in a eine lokale Extremalstelle besitzt, dann gilt $f'(a) = 0$.*

Beweis. Nach eventuellem Übergang zu $-f$, können wir annehmen, dass f in $a \in A$ ein relatives Maximum annimmt. Es gibt daher $\delta > 0$ derart, dass

$$f(x) \leq f(a)$$

für alle $x \in U_\delta(a) \cap A$ gilt. Weil a ein Häufungspunkt ist, wird diese Bedingung von unendlich vielen Punkten erfüllt. Wir werten die Grenzwertdefinition der Ableitung $f'(a)$ aus. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor. Für alle $x > a$ mit $x \in U_\delta(a) \cap A$ gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0\,.$$

Weil a ein innerer Punkt von A ist, folgt erstens

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ a < x}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0\,. \tag{14.1}$$

Entsprechend gilt für alle $x < a$ mit $x \in U_\delta(a) \cap A$ die Ungleichung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0\,.$$

Weil a ein innerer Punkt von A ist, folgt zweitens

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ a < x}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0\,. \tag{14.2}$$

Aus (14.1) und (14.2) folgt

$$f'(a) = 0\,.$$

Damit ist der Beweis beendet. Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass in einem Extremalpunkt am Rande im Allgemeinen nicht beide Ungleichungen (14.1) und (14.2) gelten müssen. Siehe Beispiel 14.3. □

Beispiel 14.3. Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ besitzt in den beiden Randpunkten des Intervalles $[-1,1]$ ein globales Maximum mit

$$f'(-1) = -2\,, \quad f'(1) = 2\,.$$

Die Ableitungen in diesen Extremalstellen sind negativ respektive positiv. Der Nullpunkt ist ein innerer Punkt des Intervalles $[-1,1]$. Der Nullpunkt ist eine globale Minimalstelle von f mit

$$f'(0) = 0\,.$$

Randpunkte und isolierte Punkte der Definitionsmenge einer Funktion müssen bei Extremwertuntersuchungen gesondert betrachtet werden. Im Falle der Differenzierbarkeit gibt der Satz von Fermat lediglich ein notwendiges Kriterium für innere Punkte. □

Aus dem ersten Mittelwertsatz 11.1 ergibt sich das folgende hinreichende Kriterium. Es bezieht sich auf das Monotonieverhalten in der Umgebung einer lokalen Extremalstelle.

Satz 14.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall und $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann gelten:*

(1) *f besitzt ein a ein lokales Maximum, wenn die Bedingung*

$$(\exists \delta > 0) : \quad \begin{cases} f'(x) \geq 0\,, & a > x \in U_\delta(a) \cap I\,, \\ f'(x) \leq 0\,, & a < x \in U_\delta(a) \cap I \end{cases}$$

erfüllt ist.

(2) *f besitzt ein a ein lokales Minimum, wenn die Bedingung*

$$(\exists \delta > 0) : \quad \begin{cases} f'(x) \leq 0\,, & a > x \in U_\delta(a) \cap I\,, \\ f'(x) \geq 0\,, & a < x \in U_\delta(a) \cap I \end{cases}$$

erfüllt ist.

Beispiel 14.5. Sei $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ die polynomiale Funktion mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2\,, \quad f'(x) = 3x(x-2)\,.$$

Die Ableitung f' verschwindet in den beiden Punkten 0 und 2. Außerdem ist f in den beiden Randpunkten -2 und 3 des Definitionsbereiches zu untersuchen. Die folgende Tabellen beschreibt das Vorzeichenverhalten der Ableitung. Der Satz 14.4 liefert die Lage und den Typ der Extrema. Schließlich ergibt ein Vergleich der Funktionswerte, dass die Funktion f in den beiden Randpunkten und im Nullpunkt jeweils globale Extrema besitzt.

	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3
$f'(x)$	24	$+$	0	$-$	0	$+$	9
$f(x)$	-16	wächst	4	fällt	0	wächst	4
	lokales Minimum		lokales Minimum		lokales Minimum		lokales Maximum
	globales Minimum		globales Minimum				globales Maximum

Siehe Beispiel 14.8. □

Beispiel 14.6 (Fortsetzung von 13.15)**.** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{|x|}\right), & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft stetig differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^2} \cdot \exp\left(-\dfrac{1}{|x|}\right), & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Folglich gilt

$$\begin{cases} f'(x) < 0\,, & x < 0\,, \\ f'(x) > 0\,, & 0 < x\,. \end{cases}$$

Nach Satz 14.4 besitzt f im Nullpunkt ein lokales Minimum. Wegen $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ hat f im Nullpunkt ein globales Minimum. □

Der Satz 13.11 von Taylor liefert das folgende hinreichende Kriterium für lokale Extrema in *inneren* Punkten.

Satz 14.7. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall und $a \in I$ ein innerer Punkt. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion mit*

(1) $(\forall k \in \mathbb{N}, k < n) : \ f^{(k)}(a) = 0\,,$

(2) $f^{(n)}(a) \neq 0\,.$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(3) *Ist n ungerade, dann besitzt f in a kein lokales Extremum.*

(4) *Ist n gerade und gilt $f^{(n)}(a) < 0$, dann besitzt f in a ein lokales Maximum.*

(5) *Ist n gerade und gilt $f^{(n)}(a) > 0$, dann besitzt f in a ein lokales Minimum.*

Beispiel 14.8. (Fortsetzung von 14.5.) Sei $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4\,, \quad f'(x) = 3x^2 - 6x\,, \quad f''(x) = 6x - 6\,.$$

Die Funktion f besitzt folgende globale und lokales Extrema:

Lokale und globale Extrema				
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Typ des Extremums in x
-2	-16			Globales Minimum
0	4	0	-6	Globales Maximum
2	0	0	6	Lokales Minimum
3	4			Globales Maximum

Die Punkte $x = -2$ und $x = 3$ sind Randpunkte von $[-2, 3]$. Siehe 16.6. □

Beispiel 14.9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = x^3 + 1$. Es gilt

$$f'(0) = 0\,, \quad f''(0) = 0\,, \quad f'''(0) = 6 \neq 0\,.$$

Nach Satz 14.7 hat f kein lokales Extremum im Nullpunkt. Die Funktion f hat im Nullpunkt einen *Wendepunkt*. □

15 Extremwertrechnung in mehreren Variablen

In der Theorie mehrerer Variablen treten Normen an die Stelle des Absolutbetrages. Da wir allein den Fall endlicher Dimensionen betrachten, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die euklidische Norm $\| . \|$ zugrunde legen.

Aus typographischen Gründen schreiben wir die Punkte des $\mathbb{R}^n$ oft als Zeilenvektoren, wenn keine Verwechslungen oder Rechenfehler zu befürchten sind. Wir machen von dieser Konvention in den folgenden Abschnitten stillschweigend Gebrauch. Der Gradient einer reell-wertigen Funktion an einer bestimmten Stelle wird stets korrekt als Spaltenvektor geschrieben. Soweit möglich, vermeiden wir fette Buchstaben im Formelsatz. Es ist darauf zu achten, ob x_i einen Punkt des arithmetischen Vektorraumes oder die Komponente eines Punktes bezeichnet. Für alle $x = (x_i)_{i=1,\ldots,n} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

Mit $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bezeichnen wir die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Die Begriffe der vorherigen Abschnitte sind, soweit dies möglich ist, auf die allgemeinere Situation des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ zu übertragen. Wir führen dies für einige dieser Begriffe exemplarisch vor. Das Ziel des vorliegenden Abschnittes ist es, die Sätze 8.6, 14.2 und 14.7 über globale und lokale Extrema auf mehrere Variable zu verallgemeinern.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Die offene ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ von x_0 ist nach Definition die Menge

$$U_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}\,.$$

Wir nennen die Menge

$$\overline{U_\epsilon(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$$

die abgeschlossene ϵ-Umgebung von x_0. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn die Bedingung

$$(\forall x \in U)(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+): \quad U_\epsilon(x) \subseteq U$$

erfüllt ist. Im Sinne dieser Definition ist $U_\epsilon(x_0)$ offen. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement

$$\complement A = \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$$

offen ist. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, wenn die Bedingung

$$(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+): \quad M \subseteq U_\epsilon(0)$$

erfüllt ist. Schließlich heißt eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Das ϵ-δ-Kriterium der Stetigkeit kann direkt übernommen werden. Wir formieren es mit Hilfe von ϵ- und δ-Umgebungen. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $\xi \in M$ ein Punkt und $f : M \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir nennen f *in ξ stetig*, wenn die Bedingung

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+) : \quad f(U_\delta(\xi) \cap M) \subseteq U_\epsilon(f(\xi))$$

erfüllt ist. Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von M stetig ist. Der Existenzsatz 8.6 von Weierstraß lässt sich wörtlich übertragen.

Satz 15.1 (Existenzsatz von Weierstraß)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere kompakte Teilmenge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f Maximum und Minimum.*

Die Verallgemeinerung des notwendigen Kriteriums 14.2 für lokale Extrema erfordert den Begriff der partiellen Ableitung.

Definition 15.2. *Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Teilmenge, $\xi \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

(1) *Die Funktion f heißt* in ξ partiell nach der i-ten Koordinate differenzierbar*, wenn der Grenzwert*

$$\partial_i f(\xi) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\xi + \epsilon e_i) - f(\xi)}{\epsilon}$$

existiert. Wir nennen $\partial_i f(\xi)$ die i-te partielle Ableitung erster Ordnung *von f in ξ.*

(2) *Wenn $\partial_i f(x)$ für alle $x \in U$ existiert, dann nennen wir $\partial_i f : U \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \partial_i f(x)$ die* i-te partielle Ableitung erster Ordung *von f. In diesem Fall heißt f* nach der i-ten Koordinate partiell differenzierbar.

(3) *Die Funktion f heißt* in ξ einmal partiell differenzierbar*, wenn die Grenzwerte $\partial_1 f(\xi), \dots, \partial_n f(\xi)$ existieren. Der Spaltenvektor*

$$\nabla f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\xi)\, e_i = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\xi) \\ \vdots \\ \partial_n f(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt der Gradient *von f in ξ.*

(4) *f heißt* einmal partiell differenzierbar*, wenn $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ existieren.*

(5) *Wenn f in ξ einmal partiell differenzierbar mit $\nabla f(\xi) = 0$ ist, dann heißt ξ ein* kritischer Punkt *von f.*

(6) *Wenn die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ existieren, dann heißt die Abbildung $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto \nabla f(x)$ der* Gradient *von f.*

(7) *f heißt* einmal stetig differenzierbar*, wenn $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ existieren und stetig sind.*

Satz 15.3 (Notwendiges Kriterium)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Teilmenge, $\xi \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in ξ einmal partiell differenzierbar ist. Wenn f in ξ ein lokales Extremum besitzt, dann gilt $\nabla f(\xi) = 0$.*

Wir wenden uns nun der Verallgemeinerung des hinreichenden Kriteriums 14.7 zu.

Definition 15.4. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Teilmenge, $\xi \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{R}$ eine einmal partiell differenzierbare Funktion.*

(1) *Wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Grenzwerte*

$$\partial_j \partial_i f(\xi) = \partial_j(\partial_i f)(\xi) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\partial_i f(\xi + \epsilon e_j) - \partial_i f(\xi)}{\epsilon}$$

existieren, dann heißt f in ξ zweimal partiell differenzierbar. *Die Matrix $Hf(\xi) = (h_{ij}(\xi)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit*

$$h_{ij}(\xi) = \partial_j \partial_i f(\xi)$$

heißt die Hesse-Matrix *von f in ξ. Nach Definition ist der Zeilenvektor $(\nabla f_i(\xi))^t$ die i-te Zeile der Matrix $Hf(\xi)$.*

(2) *f heißt* zweimal partiell differenzierbar, *wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $x \in U$ die Grenzwerte $\partial_j(\partial_i f(x))$ existieren. Die Funktion $\partial_j \partial_i f : U \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \partial_j(\partial_i f)(\xi)$ ist die j-te partielle Ableitung von $\partial_i f$.*

(3) *f heißt* zweimal stetig differenzierbar, *wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktionen $\partial_j \partial_i f : U \to \mathbb{R}$ existieren und stetig sind.*

Satz 15.5 (Satz von H. A. Schwarz)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Hesse-Matrix $Hf(x)$ für alle $x \in U$ symmetrisch.*

Wenn eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt $\xi \in U$ kein lokales Extremum besitzt, dann sagen wir, dass f in ξ einen *Sattelpunkt* besitzt.

Satz 15.6 (Hinreichendes Kriterium)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $\xi \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann gelten die Aussagen* (1) *bis* (4)*.*

(1) *Wenn alle Eigenwerte der Hesse-Matrix $Hf(\xi)$ positiv sind, dann besitzt f in ξ ein lokales Minimum.*

(2) *Wenn alle Eigenwerte der Hesse-Matrix $Hf(\xi)$ negativ sind, dann besitzt f in ξ ein lokales Maximum.*

(3) *Wenn $Hf(\xi)$ positive und negative Eigenwerte besitzt, dann besitzt f in ξ einen Sattelpunkt.*

(4) *Wenn 0 ein Eigenwert von $Hf(\xi)$ ist, dann wird keine Aussage über den kritischen Punkt ξ gemacht.*

Wir untersuchen nun Extrema mit Nebenbedingungen. Dabei wird nach den Extrema der Einschränkung $f \mid N$ einer gegebenen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf eine bestimmte Teilmenge $N \subseteq U$ der Definitionsmenge gefragt. Wir betrachten hier lediglich den Fall, dass N die Nullstellenmenge einer einzigen Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ ist. Die Übertragung auf den Fall mehrerer Funktionen verläuft analog. Wenn die Nebenbedingung

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

nach einer der Variablen x_ν eine explizite Auflösung durch elementare Funktionen zulässt, kann wie im Beispiel 15.7 verfahren werden. Die beiden Sätze 15.10 und 15.11 beschreiben die *Methode der Lagrange-Multiplikatoren*.

Beispiel 15.7 (Entropiefunktion)**.** Die Funktion $\eta : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$\eta(x) = \begin{cases} -x\log(x)\,, & x \in (0,1]\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

ist auf $[0,1]$ stetig und auf $(0,1)$ unendlich oft stetig differenzierbar. Die Stetigkeit von η im Punkt $x = 0$ folgt aus der Grenzwertformel

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} x\log(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} x\log\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

Siehe Beispiel 11.20. Wir betrachten die Funktion $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$H(x_1, x_2) = \eta(x_1) + \eta(x_2) \geq 0\,.$$

Wir untersuchen, in welchen Punkten $(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$ die Funktion H unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 1$$

ihr Maximum annimmt. Offenbar kann die Nebenbedingung nach x_2 aufgelöst werden. Daher genügt es, zu untersuchen, in welchen Punkten die Funktion $H^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$H^*(x) = H(x, 1-x) = \eta(x) + \eta(1-x) \geq 0$$

ihr Maximum annimmt. Die Funktion H^* ist auf $[0,1]$ stetig und auf $(0,1)$ unendlich oft stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Weierstraß nimmt H^* auf $[0,1]$ Maximum und Minimum an. Offenbar verschwindet H^* in den beiden Randpunkten. Auf $(0,1)$ ist H^* positiv. Daher nimmt H^* das Maximum nur in

Punkten aus $(0,1)$ an. Diese Punkte können mit Hilfe der Differentialrechnung berechnet werden. Für alle $x \in (0,1)$ gilt

$$(H^*)'(x) = -\log(x) + \log(1-x)\,.$$

In einem lokalen Extremalpunkt von H^*, der in $(0,1)$ liegt, verschwindet die erste Ableitung von H^*. Daher gilt

$$x = 1 - x\,.$$

Diese Gleichung besitzt genau eine Lösung. Daher nimmt die Funktion H^* ihr Maximum nur im Punkt $\xi^* = \frac{1}{2}$ an. *Also nimmt die Funktion H auf $[0,1]\times[0,1]$ unter der Nebenbedingung*

$$x_1 + x_2 = 1$$

ihr Maximum nur im Punkt $\xi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an. Es gilt

$$H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \max_{\substack{0 \le x_1,\, x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 = 1}} H(x_1, x_2) = \log(2)\,.$$

Das hinreichende Kriterium 14.7 zeigt, dass H^* in $\xi^* = \frac{1}{2}$ ein lokales Maximum besitzt. Für alle $x \in (0,1)$ gilt

$$(H^*)''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\,.$$

Also gilt $(H^*)''(\frac{1}{2}) = -4 < 0$. □

Wir verallgemeinern das Ergebnis von Beispiel 15.7. Zuerst definieren wir die *n-ten Entropiefunktionen $\mathcal{H}_n$.*

Definition 15.8. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$.*

(1) *Die Elemente $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der kompakten Menge $\Gamma_n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit*

$$\Gamma_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_1, \ldots, x_n \le x_1 + \ldots + x_n = 1\}$$

heißen n-stellige vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilungen*.*

(2) *Die stetige Funktion $\mathcal{H}_n : \Gamma_n \to \mathbb{R}$ mit*

$$\mathcal{H}_n(x_1, \ldots, x_n) = \eta(x_1) + \ldots + \eta(x_n)$$

heißt n-te Entropiefunktion.

(3) *Für $(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_n$ heißt der Funktionswert*

$$\mathcal{H}_n(x_1, \ldots, x_n)$$

die Entropie *der Wahrscheinlichkeitsverteilung $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Satz 15.9 (Shannon). *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gegeben.*

(1) *Für alle $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n$ gilt*

$$\mathcal{H}_n(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} \eta(p_k) \leq \log(n)\,.$$

(2) *In (1) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn*

$$(p_1, \ldots, p_n) = (\tfrac{1}{n}, \ldots \tfrac{1}{n})$$

gilt.

Beweis. Die folgende Rechnung zeigt, dass $\mathcal{H}_n(p_1, \ldots, p_n) \leq \log(n)$ gilt.

$$\begin{aligned}
\log(n) - \sum_{k=1}^{n} \eta(p_k) &= \sum_{p_k \neq 0} p_k \log(n) + \sum_{p_k \neq 0} p_k \log(p_k) \\
&= \sum_{p_k \neq 0} p_k \log(np_k) \\
&\geq \sum_{p_k \neq 0} p_k \left(1 - \frac{1}{np_k}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n} \sum_{p_k \neq 0} \frac{p_k}{p_k} \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen in der dritten Zeile gilt genau dann, wenn $np_k = 1$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt. Siehe Satz 4.25, Aussage (4). □

Die beiden Sätze 15.10 und 15.11 beschreiben die *Methode der Lagrange-Multiplikatoren* in bestimmten Spezialfällen. Wir beginnen mit dem notwendigen Kriterium.

Satz 15.10 (Lagrange-Multiplikator. Notwendiges Kriterium). *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Teilmenge. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $g : U \to \mathbb{R}$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion. Die Nullstellenmenge*

$$N = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$$

sei nicht-leer. Es sei $\xi \in N$ ein Punkt mit $\nabla g(\xi) \neq 0$. Wenn die Einschränkung $f \mid N$ im Punkt $\xi \in N$ ein lokales Extremum besitzt, dann gibt es eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(\xi) = \lambda \cdot \nabla g(\xi)\,.$$

Die reelle Zahl λ heißt Lagrange-Multiplikator.

Das hinreichende Kriterium sprechen wir nur im Fall $n = 2$ aus. Eine sinngemäße Übertragung auf den Fall mit mehr als zwei Variablen ist möglich. Für $n \geq 2$ sind die Vorzeichen aller Hauptminoren der Ordnung $2 \leq k \leq n$ der erweiterten Hesse-Matrix zu untersuchen.

Satz 15.11 (Lagrange-Multiplikator. Erweiterte Hesse-Determinante. Hinreichendes Kriterium)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nicht-leere offene Teilmenge und $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Sei $h : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Hilfsfunktion mit*

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)\,.$$

Für jeden Punkt $(x, y, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$ sei die erweiterte Hesse-Matrix *durch*

$$H(f,g)(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_1 g(x,y) & -\partial_2 g(x,y) \\ -\partial_1 g(x,y) & \partial_1\partial_1 h(x,y,\lambda) & \partial_2\partial_1 h(x,y,\lambda) \\ -\partial_2 g(x,y) & \partial_1\partial_2 h(x,y,\lambda) & \partial_2\partial_2 h(x,y,\lambda) \end{pmatrix}$$

definiert. Die zusätzliche reelle Variable λ wird ebenfalls Lagrange-Multiplikator *genannt. Die Nullstellenmenge*

$$N = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$$

sei nicht-leer. Sei $(x_0, y_0, \lambda_0) \in N \times \mathbb{R}$ ein Punkt mit

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq 0\,, \quad \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0)\,.$$

Dann gelten die Aussagen (1), (2), (3)*.*

(1) *Wenn* $\det(H(f,g)(x_0, y_0, \lambda_0)) > 0$ *gilt, dann besitzt die Einschränkung $f \mid N$ in (x_0, y_0) ein lokales Maximum.*

(2) *Wenn* $\det(H(f,g)(x_0, y_0, \lambda_0)) < 0$ *gilt, dann besitzt die Einschränkung $f \mid N$ in (x_0, y_0) ein lokales Minimum.*

(3) *Wenn* $\det(H(f,g)(x_0, y_0, \lambda_0)) = 0$ *gilt, dann wird keine Aussage gemacht, ob die Einschränkung $f \mid N$ in (x_0, y_0) ein lokales Extremum besitzt.*

Beweis. Wir verwenden den Satz über implizite Funktionen, den wir aus Zeitgründen weder formulieren noch beweisen, und den Spezialfall 15.12 der Kettenregel für die Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Erster Schritt. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es gibt $\epsilon > 0$ und eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \in U\,, \quad \gamma(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

und

$$g(\gamma(t)) = 0\,, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 g(\gamma(t)) \\ -\partial_1 g(\gamma(t)) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Siehe Definition 19.12. Nach Voraussetzung sind die beiden Koordinatenfunktionen γ_1 und γ_2 zweimal stetig differenzierbar. Aus der ersten Gleichung folgt nach der Kettenregel 15.12 die Orthogonalitätsbeziehung

$$\langle \nabla g(\gamma(t)) \,,\, \gamma'(t) \rangle = (g \circ \gamma)'(t) = 0$$

für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Die zweite Gleichung legt die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\gamma'(t)$ fest. Für $t = 0$ folgt

$$(f \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla f(\gamma(0)) \,,\, \gamma'(0) \rangle = \lambda_0 \langle \nabla g(\gamma(0)) \,,\, \gamma'(0) \rangle = 0 \,.$$

Damit ist Satz 15.10 im Fall $n = 2$ bewiesen.

Zweiter Schritt. Sei $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Aus $(g \circ \gamma)'(t) = 0$ folgt

$$0 = (g \circ \gamma)''(t) = \langle Hg(\gamma(t))\, \gamma'(t) \,,\, \gamma'(t) \rangle + \langle \nabla g(\gamma(t)) \,,\, \gamma''(t) \rangle \,.$$

Für $t = 0$ folgt

$$\langle \nabla f(\gamma(0)) \,,\, \gamma''(0) \rangle = -\lambda_0 \langle Hg(\gamma(0)\, \gamma'(0) \,,\, \gamma'(0) \rangle \,.$$

Dritter Schritt. Für alle a_1, a_2, b_{11}, b_{12}, b_{21}, $b_{22} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 \\ -a_1 & b_{11} & b_{12} \\ -a_2 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = -\left\langle \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \right\rangle \,.$$

Vierter Schritt. Die Kettenregel 15.12 liefert

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)''(\gamma(0)) &= \langle Hf(\gamma(0))\, \gamma'(0) \,,\, \gamma'(0) \rangle + \langle \nabla f(\gamma(0)) \,,\, \gamma''(0) \rangle \\ &= \langle Hf(\gamma(0))\, \gamma'(0) - \lambda_0\, Hg(\gamma(0))\, \gamma'(0) \,,\, \gamma'(0) \rangle \\ &= -\det(H(f, g)(x_0, y_0, \lambda_0)) \,. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 15.11 bewiesen. □

Im Beweis des Satz 15.11 haben wir den folgenden Spezialfall der Kettenregel für die Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher verwendet.

Satz 15.12 (Spezialfall der Kettenregel)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nicht-leere offene Teilmenge und $g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres offenes Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $g(I) \subseteq U$.*

(1) *Für alle $t \in I$ gilt*

$$(g \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla g(\gamma(t)) \,,\, \gamma'(t) \rangle \,.$$

(2) *Wenn g und γ zweimal stetig differenzierbar sind, dann gilt*

$$(g \circ \gamma)''(t) = \langle\, Hg(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, ,\, \gamma'(t)\, \rangle + \langle\, \nabla g(\gamma(t))\, ,\, \gamma''(t)\, \rangle$$

für alle $t \in I$.

Beweis. Nachweis von (1). Sei $t_0 \in I$ beliebig gewählt. Sei $h : I \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$h(t) = g(\gamma(t)) = g(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\,.$$

Für alle $t \in I \setminus \{t_0\}$ gilt

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{g(\gamma(t)) - g(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t))}{t - t_0} + \frac{g(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t)) - g(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

Nach dem Mittelwertsatz 11.1 gibt es $\xi_k(t)$ zwischen $\gamma_k(t)$ und $\gamma_k(t_0)$ mit

$$g(\gamma(t)) - g(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t)) = \partial_1 g(\xi_1(t), \gamma_2(t)) \cdot (\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0))\,,$$

$$g(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t)) - g(\gamma(t_0)) = \partial_2 g(\gamma_1(t), \xi_2(t)) \cdot (\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0))$$

für alle $t \in I$ und $k = 1, 2$. Für $t \to t_0$ gilt

$$\xi_k(t) \to \gamma_k(t_0)\,.$$

Weil g stetig differenzierbar und γ differenzierbar ist, ist die zusammengesetzte Funktion h in t_0 differenzierbar mit

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= \partial_1 g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma_1'(t_0) + \partial_2 g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma_2'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^{2} \partial_k g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma_k'(t_0) \\ &= \langle\, \nabla g(\gamma(t_0))\, ,\, \gamma'(t_0)\, \rangle\,. \end{aligned}$$

Aus der stetigen Differenzierbarkeit der Funktion g und der Kurve γ folgt schließlich die stetige Differenzierbarkeit von h.

Nachweis von (2). Wir differenzieren die Funktion $h' : I \to \mathbb{R}$. Dabei wenden wir Teil (1) auf den ersten Faktor der Produktfunktionen

$$\partial_1 g(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,, \quad \partial_2 g(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)$$

an. Die Produktregel (3) aus Satz 10.14 liefert

$$\begin{aligned} h''(t) &= \sum_{k=1}^{2} (\partial_k g \circ \gamma)'(t) \cdot \gamma_k'(t) + \sum_{k=1}^{2} \partial_k g(\gamma(t)) \cdot \gamma_k''(t) \\ &= \sum_{k,l=1}^{2} \partial_l \partial_k g(\gamma(t) \cdot \gamma_k'(t) \cdot \gamma_l'(t) + \langle\, \nabla g(\gamma(t))\, ,\, \gamma''(t)\, \rangle \\ &= \langle\, Hg(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, ,\, \gamma'(t)\, \rangle + \langle\, \nabla g(\gamma(t))\, ,\, \gamma''(t)\, \rangle \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Der Beweis ist damit beendet. □

Beispiel 15.13 (Maximale Entropie)**.** Auf dem oberen rechten Quadranten

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0\}\,.$$

seien die Funktionen $f,\, g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -x\log(x) - y\log(y)\,, \quad g(x, y) = x + y - 1$$

gegeben. Es gilt

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} = \{(x, 1 - x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1)\}\,.$$

Die Einschränkung $f \mid N$ nimmt nur positive Werte an. Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\log(x) - 1 \\ -\log(y) - 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad x + y = 1$$

wird nur durch

$$x = y = \tfrac{1}{2}\,, \quad \lambda = \log(2) - 1$$

gelöst. Wir werten die erweiterte Hesse-Matrix aus. Wegen

$$\det(H(f, g)(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \log(2) - 1)) = 4 > 0$$

besitzt die positive Funktion $f \mid N$ im Punkte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Maximum. Es gilt $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \log(2)$. Eine einfache Überlegung zeigt, dass $\log(2)$ das globale Maximum von $f \mid N$ ist. Siehe Beispiel 15.7. Aus Gründen der Normierung ist es üblich, den natürlichen Logarithmus in der Definition von f durch den Logarithmus zur Basis 2 zu ersetzen. Siehe Satz und Definition 3.9. □

16 Das Newton-Verfahren

Ein wichtiges Problem ist die Nullstellenberechnung nicht-linearer Funktionen. Wir motivieren das *Newton-Verfahren.* Der Satz 16.2 beschreibt die Einzelheiten. Die Berechnung einer Nullstelle wird in die Berechnung eines Fixpunktes übersetzt. Ein hinreichendes Kriterum für attraktive Fixpunkte gibt Satz 16.5.

Sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die in $\xi \in I$ eine Nullstelle mit $f'(\xi) \neq 0$ besitzt. Sei $x_0 \in I$ eine Approximation von ξ. In einem benachbarten Punkt $x \in I$ von x_0 gilt nach Definition der Ableitung

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = T_1 f(x, x_0)\,.$$

Dabei ist $T_1 f(x, x_0)$ das erste Taylor-Polynom von f mit dem Entwicklungspunkt x_0. Die Nullstelle

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx \xi$$

des Polynoms $T_1 f(x, x_0)$ betrachten wir als neue Approximation der betrachten Nullstelle ξ von f. Die Funktion $x \mapsto T_1 f(x, x_0)$ beschreibt die Tangente durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen von f. Diese Tangente schneidet die x-Achse in x_1. Wir wiederholen das Verfahren mit x_1 anstelle von x_0 und erhalten die Approximation

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx \xi\,.$$

Induktiv erhalten wir die *Newton-Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$x_{n+1} = \mathcal{N}(f)(x_n)\,, \quad \mathcal{N}(f)(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Dabei ist $x_0 \in I$ der Startwert. Zu untersuchen ist, für welche Startwerte die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert ist und gegen die Nullstelle ξ konvergiert.

Die Nullstelle ξ der gegebenen Funktion f ist ein Fixpunkt der zugehörigen Newton-Funktion $\mathcal{N}(f)$. Das heißt, es gilt

$$\mathcal{N}(f)(\xi) = \xi\,.$$

Die *Newton-Funktion* $\mathcal{N}(f)$ *der Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ ist zunächst für alle $x \in I$ mit $f'(x) \neq 0$ definiert. Unter Umständen besitzt die Newton-Funktion eine stetige differenzierbare Fortsetzung auf eine umfangreichere Menge. Diese Fortsetzung ermöglicht eventuell eine Fixpunktapproximation einer Nullstelle, in der die Ableitung f' verschwindet. Ob ein Fixpunkt von $\mathcal{N}(f)$ attraktiv ist, kann am der Verhalten der Ableitung

$$\mathcal{N}(f)' = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x) f'(x)}$$

abgelesen werden. Siehe Satz 16.5 und Beispiel 16.6.

Beispiel 16.1 (Fortsetzung von Beispiel 2.17)**.** Sei $a > 0$. Wir betrachten $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - a$. Die zugehörige Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$. Die zugehörige Newton-Funktion $\mathcal{N}(f) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{N}(f) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \quad \mathcal{N}(f)(\sqrt{a}\,) = \sqrt{a}$$

ist unendlich oft differenzierbar. Es ist $\sqrt{a}$ der einzige Fixpunkt von $\mathcal{N}(f)$. Für $x_0 = 1$ und $a = 2$ erhalten wir

x_0	1.00000000000000000000
x_1	1.50000000000000000000 . . .
x_2	1.41666666666666666666 . . .
x_3	1.41421568627450980392 . . .
x_4	1.41421356237468991062 . . .
x_5	1.41421356237309504880 . . .
$\sqrt{2}$	$1.41421356237309504880^2_1$

Dabei sind die ersten zwanzig Nachkommastellen korrekt. □

Satz 16.2 (Newton-Verfahren)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres offenes Intervall und $x_0 \in I$ ein Punkt. Die stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen* (1) *bis* (4)*.*

(1) $(\exists\gamma > 0)(\forall x, y \in I): \quad |f'(x) - f'(y)| \le \gamma\,|x - y|\,.$

(2) $(\exists\beta > 0)(\forall x \in I): \quad \dfrac{1}{\beta} \le |f'(x)|\,.$

(3) $\alpha = \left|\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| < \dfrac{1}{2\beta\gamma}\,.$

(4) $\overline{U_{2\alpha}(x_0)} \subseteq I\,.$

Dann gelten die folgenden Aussagen (5) *bis* (8)*.*

(5) *Die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Funktion f mit*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

und dem Startwert x_0 ist wohldefiniert.

(6) $(\exists!\xi \in \overline{U_{2\alpha}(x_0)}): \quad f(\xi) = 0\,.$

(7) *Es gilt $x_n \to \xi$.*

(8) $(\forall n \in \mathbb{N}_0): \quad |x_n - \xi| \le 2\alpha(\alpha\beta\gamma)^{2^n-1}\,.$

Beispiel 16.3. Wir berechnen die Nullstelle $\xi = \frac{\pi}{2}$ von $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x)$ näherungsweise. Die zugehörige Newton-Folge mit $x_0 = 1.4$ liefert

x_0	1.40000000000000000000
x_1	1.57247672583179995277...
x_2	1.57079632521322432345...
x_3	1.57079632679489661923...
x_4	1.57079632679489661923...
x_5	1.57079632679489661923...
x_6	1.57079632679489661923...
$\frac{\pi}{2}$	$1.57079632679489661923^2_1$

Dabei sind die ersten zwanzig Nachkommastellen korrekt. Mit

$$\gamma = 1\,, \quad \beta = 1.2\,, \quad 0.17 < \alpha = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| < 0.18$$

erhalten wir nach Satz 16.2 die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \xi| \leq 0.36 \cdot 0.22^{2^n - 1}\,.$$

Speziell für $n = 4, 5, 6$ ergibt sich

$$|x_4 - \xi| \leq 0.36 \cdot 0.22^{15} \leq 5.0 \cdot 10^{-11}\,,$$

$$|x_5 - \xi| \leq 0.36 \cdot 0.22^{31} \leq 1.5 \cdot 10^{-21}\,,$$

$$|x_6 - \xi| \leq 0.36 \cdot 0.22^{63} \leq 1.4 \cdot 10^{-42}\,.$$

□

Definition 16.4. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ gegeben.*

(1) *Ein Punkt $\xi \in U$ heißt ein* Fixpunkt von f*, wenn $f(\xi) = \xi$ gilt.*

(2) *Ein Fixpunkt $\xi \in U$ von f heißt* attraktiv*, wenn es eine offene ϵ-Umgebung $U_\epsilon(\xi)$ von ξ gibt, die die folgenden Eigenschaften* (i) *und* (ii) *besitzt.*

   (i) *$U_\epsilon(\xi) \subseteq U$.*

   (ii) *Sei $x_0 \in U_\epsilon(\xi)$ irgendein Startwert. Dann gilt*

   $$x_n = f(x_{n-1}) \in U_\epsilon(\xi)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Iterationsfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Fixpunkt ξ.

Satz 16.5. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(U) \subseteq U$. Ein Fixpunkt $\xi \in U$ von f mit*

$$|f'(\xi)| < 1$$

ist attraktiv.

Beispiel 16.6 (Fortsetzung von Beispiel 14.8)**.** Die polynomiale Funktion $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2 \,.$$

besitzt eine einfache Nullstelle in $\xi_1 = -1$ und eine zweifache Nullstelle in $\xi_2 = 2$. Es gelten

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)\,, \quad f'(-1) = 9\,, \quad f'(2) = 0\,.$$

Der Satz 16.2 garantiert die Konvergenz geeigneter Newton-Folgen lediglich für die Berechnung des ersten Fixpunktes ξ_1. Der Satz 16.5 garantiert dagegen die Konvergenz geeigneter Newton-Folgen in beiden Fällen.

Die zu f gehörige Newton-Funktion besitzt eine unendlich oft stetig differenzierbare Fortsetzung auf $[-2, 3] \setminus \{0\}$. Diese Fortsetzung bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathcal{N}(f)$. Wir betrachten die Funktion $\mathcal{N}(f) : [-2, 3] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{N}(f)(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{3x}\,.$$

Diese Funktion $\mathcal{N}(f)$ besitzt die beiden Fixpunkte $\xi_1 = -1$ und $\xi_2 = 2$. Wir berechnen die Ableitung. Die Quotientenregel liefert

$$\mathcal{N}(f)'(x) = \frac{3x \cdot (4x+1) - 3 \cdot (2x^2 + x + 2)}{9x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{3x^2}\,.$$

Wir erhalten

$$\mathcal{N}(f)'(-1) = 0\,, \quad \mathcal{N}(f)'(2) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Nach Satz 16.5 sind beide Fixpunkte attraktiv. □

17 Das Riemann-Integral

In diesem Abschnitt betrachten wir das Riemann-Integral. Den Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation stellt der Hauptsatz her. Wir formulieren drei Versionen. Der Satz 18.2 von Lebesgue charakterisiert die Riemann-integrierbaren Funktionen.

Wir heben ausdrücklich hervor, dass die Existenz von Stammfunktionen und die Existenz von Integralen begrifflich zu unterscheiden sind. Integrale werden ebenso wie die Ableitungen als Grenzwerte definiert. Ein sorgfältiger Aufbau des archimedisch geordneten Körpers der reellen Zahlen ist daher unabdingbar.

Der erste Mittelwertsatz liefert eine Motivation für die Integralkonstruktion. Dabei lassen wir uns von den beiden folgenden Fragen leiten:

(1) Kann eine Funktion aus ihrer Ableitung rekonstruiert werden?

(2) Kann einer Funktion angesehen werden, ob sie eine Stammfunktion besitzt?

Geometrische Deutungen des Integrales geben wir in eigenen Abschnitten. In Abschnitt 19 definieren wir das Flächenmaß für ebene Bereiche erster Art und die Kurvenlänge stückweise stetig differenzierbarer ebener Wege.

In Abschnitt 20 definieren wir das Flächenmaß allgemeiner für ebene Normalbereiche. Die elementare Version Integralformel 21.1 von Gauß-Green ist eine Übertragung des Hauptsatzes für Funktionen mit zwei Variablen. Der Satz von Gauß-Green ermöglicht es, das Flächenmaß eines ebenen Normalbereiches mit einem hinreichend regulären Rand durch ein Randintegral auszudrücken.

Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wie lässt sich der Funktionswert $F(b)$ aus dem Anfangswert $F(a)$ und der Ableitung $f = F'$ rekonstruieren? Nach dem dem Mittelwertsatz 11.1 gibt es ein $\eta \in (a, b)$ mit

$$F(b) = F(a) + f(\eta) \cdot (b - a)\,.$$

Wenn wir den unbekannten Punkt η durch irgendeinen Punkt $\xi \in [a, b]$ ersetzen, erhalten wir

$$F(b) \approx F(a) + f(\xi) \cdot (b - a)\,,$$

Dies ist im Allgemeinen eine grobe Näherung. Wir führen deshalb weitere Teilungspunkte x_k und Zwischenpunkte ξ_k mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

ein und betrachten die Näherung

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})\,.$$

Die Idee ist, dass im Fall

$$\max_{1 \le k \le n} |x_k - x_{k-1}| \to 0$$

sogar Gleichheit gilt. Zur bequemeren Ausdrucksweise und Präzisierung treffen wir die Definitionen 17.1 und 17.2.

Definition 17.1. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben.*

(1) *Die* Teilungspunkte $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *mit*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

bilden eine Zerlegung Z *des Intervalles* $[a, b]$ *mit der* Feinheit

$$|Z| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| .$$

Die Vektoren $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *heißen* Zwischenvektoren *der Zerlegung* Z *mit den* Zwischenpunkten $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$.

(2) *Sei $\mathcal{Z}(a, b)$ die Menge der Zerlegungen von $[a, b]$. Für eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ sei $\mathcal{V}(Z)$ die Menge der Zwischenvektoren von Z.*

(3) *Sei $\delta > 0$. Dann sei $\mathcal{Z}_\delta(a, b)$ die Menge der Zerlegungen $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit der Feinheit $|Z| \leq \delta$.*

(4) *Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$. Eine Zerlegung $Z' \in \mathcal{Z}(a, b)$ heißt eine* Verfeinerung *von Z, wenn die Teilungspunkte von Z auch Teilungspunkte von Z' sind. Wir schreiben dafür $Z' \leq Z$.*

(5) *Seien Z, Z_1, $Z_2 \in \mathcal{Z}(a, b)$. Wenn $Z \leq Z_1$ und $Z \leq Z_2$ gelten, dann heißt Z eine* gemeinsame Verfeinerung *von Z_1 und Z_2.*

(6) *Seien $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ und $\Xi \in \mathcal{V}(Z)$ gegeben. Dann heißt*

$$S(f, Z, \Xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

die Riemann-Summe *von f bezüglich Z und Ξ.*

Nach dieser Präzisierung kehren wir zu unserer Rekonstruktionsaufgabe (1) zurück. Die Idee ist, die Differenz $F(b) - F(a)$ als Grenzwert

$$\lim_{|Z| \to 0} S(f, Z, \Xi)$$

von Riemann-Summen darzustellen. Dieser Grenzwert ist das *Riemann-Integral.* Es wird mit einem stilisierten Zeichen $\int$ für den Buchstaben S bezeichnet.

Definition 17.2. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben.*

(1) *Die Funktion f heißt* Riemann-integrierbar *oder* integrierbar *auf $[a, b]$, wenn es eine reelle Zahl $S \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall Z \in \mathcal{Z}_\delta(a, b))(\forall\, \Xi \in \mathcal{V}(Z)) : \; |S(f, Z, \Xi) - S| \leq \epsilon$$

erfüllt ist.

(2) *Im Falle der Existenz heißt die reelle Zahl S das* Riemann-Integral *oder* Integral *von f über $[a, b]$ und wird mit*

$$S = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx$$

bezeichnet. Dabei ist a die untere *und b die* obere Grenze *des Integrals. Das Intervall $[a, b]$ heißt das* Integrationsintervall. *Wir nennen x die* Integrationsvariable *und die Funktion f den* Integranden.

(3) *Zusätzlich definieren wir*

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,, \qquad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Für den Fall, dass f nicht in allen Punkten des Intervalles $[a, b]$ definiert ist, siehe Definition 19.8.

Konstante Funktionen sind auf kompakten Intervallen trivialerweis integrierbar, weil in diesem Fall die Riemann-Summen für alle Zerlegungen und alle Wahlen von Zwischenpunkten denselben Wert besitzen.

Beispiel 17.3 (Konstante Funktionen)**.** Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b c\, dx = c(b - a)\,.$$

Seien eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}_\delta(a, b)$ mit den Teilungspunkten

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

und $\Xi \in \mathcal{V}(Z)$ ein Zwischenvektor mit den Zwischenpunkten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gegeben. Dann gilt

$$S(f, Z, \Xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c \cdot (x_k - x_{k-1}) = c(b - a)\,.$$

Siehe die Normierung (3) des Riemann-Integrals in Satz 17.14. □

Beispiel 17.4 (Die charakteristische Funktion eines Punktes)**.** Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\xi \in [a, b]$ gegeben. Die Funktion $\chi_\xi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_\xi(x) = \begin{cases} 1\,, & x = \xi\,, \\ 0\,, & x \in [a, b] \setminus \{\xi\} \end{cases}$$

ist in ξ unstetig. Wir zeigen, dass die charakteristische Funktion χ_ξ des Punktes $\xi \in [a,b]$ Riemann-integrierbar ist. Sei $\delta > 0$ beliebig gegeben. Seien $Z \in \mathcal{Z}_\delta(a,b)$ eine Zerlegung mit den Teilungspunkten

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

und $\Xi \in \mathcal{V}(Z)$ ein Zwischenvektor. Dann gilt

$$|S(\chi_\xi, Z, \Xi) - 0| \leq \delta\,.$$

Folglich ist χ_ξ Riemann-integrierbar mit

$$\int_a^b \chi_\xi(x)\,dx = 0\,.$$

Eine typische Anwendung machen wir in Beispiel 17.16. Nach Satz 17.14 ist das Riemann-Integral ein lineares Funktional. Daher kann eine Riemann-integrierbare Funktion in endlichen vielen Punkten abgeändert werden, ohne dass sich die Integrierbarkeit oder der Wert des Integrales ändern. □

Die eingangs gestellten Fragen lassen sich mit Hilfe des Riemann-Integrales beantworten. Dies ist der Inhalt des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Wir formulieren drei Versionen. Das Integrabilitätskriterium 18.2 von Lebesgue charakterisiert die Riemann-integrierbaren Funktionen.

Wir beginnen die Erörterung des Riemann-Integrales mit einem Kriterium vom Cauchy-Typ. Wie bei den Cauchy-Kriterien für die Konvergenz von Folgen und Reihen tritt der Grenzwert nicht explizit auf.

Das Integrabilitätskriterium 17.12 von Riemann ist ebenfalls ein Kriterium vom Cauchy-Typ. Die Kriterien 17.5 respektive 17.12 werden oft als Ausgangspunkt der Theorie des Riemann-Integrals gewählt.

Satz 17.5 (Integrabilitätskriterium vom Cauchy-Typ)**.** *Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann auf $[a,b]$ integrierbar, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_\delta(a,b))(\forall\, \Xi_1 \in \mathcal{V}(Z_1))(\forall\, \Xi_2 \in \mathcal{V}(Z_2)) :$$
$$|S(f, Z_1, \Xi_1) - S(f, Z_2, \Xi_2)| \leq \epsilon$$

erfüllt ist.

Beispiel 17.6 (Dirichlet-Funktion. Fortsetzung von Beispiel 6.10)**.** Die Dirichlet-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist auf keinem kompakten Intervall $[a,b]$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ integrierbar. Sei $\delta > 0$. Sei eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}_\delta(a,b)$ mit den Teilungspunkten

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Sei $\Xi \in \mathcal{V}(Z)$ ein Zwischenvektor mit rationalen Zwischenpunkten $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(f \mid [a,b], Z, \Xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a \neq 0 \,. \end{aligned}$$

Sei $\Psi \in \mathcal{V}(Z)$ ein Zwischenvektor mit irrationalen Zwischenpunkten $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(f \mid [a,b], Z, \Psi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\psi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0 \,. \end{aligned}$$

Nach Kriterium 17.5 ist die Einschränkung $f \mid [a,b]$ nicht Riemann-integrierbar. In Beispiel 6.10 haben wir gesehen, dass die Dirichlet-Funktion nirgends stetig ist. □

Satz 17.7. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis. Erster Schritt. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ eine Zerlegung des Intervalles $[a,b]$ mit den Teilungspunkten

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \,.$$

Wir nehmen an, dass eine reelle Konstante $\Omega \geq 0$ mit

$$(\forall k = 1, \ldots, n)\colon \quad \sup_{x_{k-1} \leq x, y \leq x_k} |g(x) - g(y)| \leq \Omega$$

existiert. Das Supremum

$$\Omega_{[x_{k-1}, x_k]}(g) = \sup_{x_{k-1} \leq x, y \leq x_k} |g(x) - g(y)|$$

heißt die *Schwankung von g auf* $[x_{k-1}, x_k]$. Sei $Z' \in \mathcal{Z}(a,b)$ eine Verfeinerung von Z. Dann gilt

$$|S(g, Z, \Xi) - S(g, Z', \Xi')| \leq \Omega \cdot |b - a| \,.$$

für alle Zwischenvektoren $\Xi \in \mathcal{V}(Z)$ der Zerlegung Z und alle Zwischenvektoren $\Xi' \in \mathcal{V}(Z')$ der Verfeinerung Z'.

Zweiter Schritt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Nach Satz 8.11 ist f gleichmäßig stetig. Daher gibt es $\delta_\epsilon > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2 \cdot |b - a|}$$

für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leq \delta_\epsilon$. Also gibt es ein $\delta_\epsilon > 0$ derart, dass

$$\Omega_{[\alpha,\beta]}(f) \leq \frac{\epsilon}{2 \cdot |b - a|}$$

für alle $a \leq \alpha < \beta \leq b$ mit $|\beta - \alpha| \leq \delta_\epsilon$ gilt.

Dritter Schritt. Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_{\delta_\epsilon}(a, b)$ beliebig gegeben. Es sei $Z' \in \mathcal{Z}_{\delta_\epsilon}(a, b)$ die gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Für alle Zwischenvektoren $\Xi_1 \in \mathcal{V}(Z_1)$, $\Xi_2 \in \mathcal{V}(Z_2)$ und $\Xi' \in \mathcal{V}(Z')$ gilt nach den ersten beiden Schritten

$$\begin{aligned}
&|S(f, Z_1, \Xi_1) - S(f, Z_2, \Xi_2)| \\
&\leq |S(f, Z_1, \Xi_1) - S(f, Z', \Xi')| + |S(f, Z', \Xi') - S(f, Z_2, \Xi_2)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2 \cdot |b - a|} \cdot |b - a| + \frac{\epsilon}{2 \cdot |b - a|} \cdot |b - a| \leq \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Aus dem Kriterium 17.5 folgt, dass f integrierbar ist. Damit ist der Beweis beendet. □

Wenn die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion gesichert ist, dann kann das Integral als Limes von Riemann-Summen einer geschickt gewählten Folge von Zerlegungen und Zwischenvektoren berechnet werden.

Beispiel 17.8 (Erste Winkelhalbierende, Normalparabel)**.** Sei $0 < b < \infty$. Die polynomialen Funktion $f_k : [0, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = x\,, \quad f_2(x) = x^2$$

sind stetig und daher Riemann-integrierbar. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$Z_n \in \mathcal{Z}_{\delta_n}(0, b)\,, \quad \delta_n = \frac{1}{n}$$

die äquidistante Zerlegung mit den Teilungspunkten

$$0 = 0 \cdot \frac{b}{n} < 1 \cdot \frac{b}{n} < 2 \cdot \frac{b}{n} < \ldots < (n-1) \cdot \frac{b}{n} < n \cdot \frac{b}{n} = b\,.$$

Entsprechend sei $\Xi_n \in \mathcal{V}(Z_n)$ der Zwischenvektor mit den Zwischenpunkten

$$1 \cdot \frac{b}{n} < 2 \cdot \frac{b}{n} < \ldots < (n-1) \cdot \frac{b}{n} < n \cdot \frac{n}{b}\,.$$

Als Zwischenpunkte werden jeweils die rechten Intervallgrenzen der Teilintervalle der Zerlegungen Z_n gewählt.

(1) Für f_1 erhalten wir

$$S(f_1, Z_n, \Xi_n) = b^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = b^2 \cdot \frac{n+1}{2n}\,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$\int_0^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f_1, Z_n, \Xi_n) = \frac{b^2}{2}\,.$$

(2) Für f_2 erhalten wir

$$S(f_2, Z_n, \Xi_n) = b^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = b^3 \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}\,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f_2, Z_n, \Xi_n) = \frac{b^3}{3}\,.$$

Diese Methode zur Berechnung der Integrale beruht auf der Wahl geschickter Zerlegungen und Zwischenpunkte sowie auf der Kenntnis bestimmter Summenformeln. □

Beispiel 17.9 (Hyperbel)**.** Sei $1 < b < \infty$. Die Funktion $f : [1, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ist stetig und daher Riemann-integrierbar. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$Z_n \in \mathcal{Z}_{\delta_n}(1, b)\,, \quad \delta_n = q_n - 1 = \sqrt[n]{b} - 1 > 0$$

die Zerlegung mit den geometrisch wachsenden Teilungspunkten

$$1 = q_n^0 < q_n < q_n^2 \ldots < q_n^n = b\,, \quad q_n = \sqrt[n]{b}\,.$$

Entsprechend sei $\Xi_n \in \mathcal{V}(Z_n)$ der Zwischenvektor mit den Zwischenpunkten

$$q_n < q_n^2 < \ldots < q_n^n = b\,.$$

Als Zwischenpunkte werden jeweils die rechten Intervallgrenzen der Teilintervalle der Zerlegungen Z_n gewählt. Dann gilt

$$S(f, Z_n, \Xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_n^k - q_n^{k-1}}{q_n^k} = \frac{n(\sqrt[n]{b} - 1)}{\sqrt[n]{b}}\,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n, \Xi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{b} - 1)}{\sqrt[n]{b}} = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b} - 1) = \log(b)\,.$$

Diese Formel zeigt, dass der Logarithmus durch das Integral einer rationalen Funktion definiert werden kann. Siehe Beispiel 17.32. □

Satz 17.10 (Beschränktheit. Fundamentale Ungleichungen)**.** *Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist f beschränkt und es gelten die Ungleichungen*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \left(\sup_{a \le x \le b} |f(x)| \right) \cdot (b - a)\,.$$

Wir kehren zur Integraldefinition zurück und formulieren das Integrabilitätskriterium von Riemann. Dieses Kriterium setzt die Beschränktheit der betrachteten Funktion voraus. Nach Satz 17.10 ist diese Voraussetzung keine wirkliche Einschränkung. Das Kriterium von Riemann ist ebenso wie Satz 17.5 ein Kriterium vom Cauchy-Typ.

Definition 17.11 (Ober- und Untersumme)**.** *Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei Z die Zerlegung mit den Teilungspunkten*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Summen

$$S(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})\,, \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \le \xi \le x_k} f(\xi)\,,$$

$$s(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})\,, \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \le \xi \le x_k} f(\xi)$$

heißen die Untersumme *respektive die* Obersumme *von f bezüglich Z. Es sei $\mathcal{Z}(a,b)$ die Menge der Zerlegungen von $[a,b]$. Es gilt*

$$s(f,Z) \le S(f,Z)$$

für alle Zerlegungen $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$.

Ober- und Untersumme einer Funktion, die monoton oder stetig ist, sind spezielle Riemann-Summen.

Satz 17.12 (Integrabilitätskriterium von Riemann)**.** *Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Bedingung*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists Z \in \mathcal{Z}(a,b)) : \quad S(f,Z) - s(f,Z) \le \epsilon$$

erfüllt ist.

Beispiel 17.13 (Dirichlet-Funktion. Fortsetzung von 6.10 und 17.6)**.** Die Dirichlet-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist auf keinem kompakten Intervall $[a,b]$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ integrierbar. Es gilt nämlich

$$S(f,Z) = 1 \cdot (b-a)\,, \quad s(f,Z) = 0$$

für alle Zerlegungen Z des Intervalles $[a,b]$. In Beispiel 6.10 haben wir gesehen, dass die Dirichlet-Funktion nirgends stetig ist. □

Satz 17.14. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Sei $c \in [a, b]$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) (Linearität). *Seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ reelle Konstanten und f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann ist die Funktion $\alpha f + \beta g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ integrierbar. Es gilt*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

(2) (Positivität). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0\,.$$

(3) (Normierung). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit $f(x) = 1$ für alle $x \in [a, b]$ ist integrierbar. Es gilt*

$$\int_a^b dx = \int_a^b f(x)\, dx = b - a\,.$$

(4) (Intervall-Additivität). *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn ihre Einschränkungen auf die Teilintervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar sind. Wenn f integrierbar ist, gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Satz 17.15. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $M \subseteq [a, b]$ eine endliche Teilmenge. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die in allen Punkten von $[a, b] \setminus M$ stetig ist. Dann ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.*

Beweis. Wegen der Intervalladditivität nach Satz 17.14 genügt es, den Beweis für Funktionen, die höchstens in einem beiden Randpunkte unstetig sind, zu beweisen. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass die beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $(a, b]$ stetig ist.

Da f beschränkt ist, gibt es eine Schranke $L > 0$ mit $|f(x)| \leq L$ für alle $x \in [a, b]$. Sei $\epsilon > 0$ mit

$$a < a + \frac{\epsilon}{4L} < b$$

gegeben. Nach Satz 8.11 ist die Funktion f auf dem kompakten Teilintervall

$$I_\epsilon = \big[a + \frac{\epsilon}{4L}, b\big]$$

gleichmässig stetig, weil f dort stetig ist. Folglich gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$(\forall y_1, y_2 \in I_\epsilon): \quad |y_1 - y_2| \leq \delta \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}\,.$$

Nun sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ eine Zerlegung mit den Teilungspunkten

$$a = x_0 < x_1 = a + \frac{\epsilon}{4L} < x_2 < \ldots < x_n = b\,,$$

die die Bedingung

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \delta$$

für alle $k = 2, \ldots, n$ erfüllen. Damit erhalten wir

$$|S(f, Z) - s(f, Z)| \leq 2L \cdot \frac{\epsilon}{4L} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b - x_1) \leq \epsilon\,.$$

Nach dem Kriterium 17.12 von Riemann ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar. □

Beispiel 17.16 (Sägezahnfunktion mit zwei Zähnen. Fortsetzung von 6.9)**.** Die beschränkte Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0, 1)\,, \\ x - 1\,, & x \in [1, 2)\,, \\ 0\,, & x = 2 \end{cases}$$

ist auf $[0, 2] \setminus \{1, 2\}$ stetig. Nach Satz 17.15 ist f auf dem Intervall $[0, 2]$ Riemann-integrierbar. Das Integral einer charakteristischen Funktion eines Punktes des Intervalles $[0, 2]$ ist gleich Null. Siehe Beispiel 17.4. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \int_0^2 x\,dx - \int_1^2 dx \\ &= \left[\,\tfrac{1}{2}\,x^2\,\right]_0^2 - 1 \\ &= 2 - 1 = 1\,. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Integrales haben wir ausgenutzt, dass die Einschränkungen von f auf die Teilintervalle $[0, 1]$ und $[1, 2]$ durch Abänderung in den Randpunkten $x = 1$ respektive $x = 2$ stetig gemacht werden können. Der Wert der Teilintegrale ändert sich dabei nicht. Siehe Beispiel 17.28. □

Satz 17.17. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Eine monotone Funktion f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist. Dann gilt

$$f(a) \leq f(x) \leq f(y) \leq f(b)$$

für alle $a \leq x \leq y \leq b$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ die äquidistante Zerlegung mit den Teilungspunkten

$$a = a + 0 \cdot q < a + 1 \cdot q \ldots < a + (n+2) \cdot q_n = b\,, \quad q_n = \frac{b-a}{n+2}\,.$$

Wel f monoton wachsend ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq S(f, Z_n) - s(f, Z_n) &\leq \sum_{k=1}^{n+2} (f(a + kq_n) - f(a + (k-1)q_n)) \cdot q_n \\ &= q_n \cdot \sum_{k=1}^{n+2} (f(a + kq_n) - f(a + (k-1)q_n)) \\ &= \frac{b-a}{n+2} \cdot (f(b) - f(a))\,. \end{aligned}$$

Nach dem Riemann-Kriterium 17.12 ist f integrierbar. □

Wir kehren zu unserer Rekonstruktionsaufgabe (1) zurück. Nach dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* kann $F(b)$ aus dem Anfangswert $F(a)$ und dem Integral der Ableitung F' von $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ rekonstruiert werden, wenn F stetig differenzierbar ist.

Satz 17.18 (Hauptsatz. Erste Version)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Wenn F' integrierbar ist, dann gilt*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx\,.$$

(2) *Wenn F' stetig ist, dann ist F' integrierbar.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von (1). Wir setzen also voraus, dass F' integrierbar ist. Für jede Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gilt

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1}))\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz 11.1 gibt es Zwischenpunkte ψ_k mit

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\psi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,.$$

Sei nun $(Z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Z}(a,b)$ eine Zerlegungsfolge mit $|Z_\nu| \to 0$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Zwischenvektoren $\Psi_\nu \in \mathbb{R}^{n(\nu)}$ mit

$$F(b) - F(a) = S(F', Z_\nu, \Psi_\nu)\,.$$

Nach Konstruktion ist $(S(F', Z_\nu, \Psi_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Riemann-Folge der integrierbaren Funktion $F' : [a,b] \to \mathbb{R}$. Daher gilt

$$F(b) - F(a) = S(F', Z_\nu, \Psi_\nu) \to \int_a^b F'(x)\,dx\,.$$

Nun beweisen wir Aussage (2). Wenn F' stetig ist, dann ist F' nach Satz 17.7 integrierbar. Damit ist der Beweis des Hautsatzes 17.18 beendet. □

Beispiel 17.19. Seien a, $b \in \mathbb{R}_+$ mit $a < b$. Die Funktion $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit $\log'(x) = 1/x$. Nach dem Hauptsatz 17.18 gilt

$$\log(b) - \log(a) = \int_a^b \frac{dx}{x}\,.$$

Folglich gilt

$$\log(\xi) = \int_1^\xi \frac{dx}{x}$$

für alle $\xi > 0$. Siehe Beispiel 17.9. □

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktionen $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ muss weder stetig noch Riemann-integrierbar sein.

Beispiel 17.20 (Eine unstetige integrierbare Funktion mit Stammfunktionen)**.** Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos(x^{-1}) + \sin(x^{-1})\,, & x \in [-1,1] \setminus \{0\}\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

ist auf $[-1,1]$ beschränkt und in allen Punkten der Menge $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Im Punkt $x = 0$ ist f unstetig. Nach Satz 17.15 ist f integrierbar. Es gilt

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0\,,$$

weil f ungerade ist. Die Funktion $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos(x^{-1})\,, & x \in [-1,1] \setminus \{0\}\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Die Differenzierbarkeit von F mit $F'(x) = f(x)$ ist in den Punkten $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ nach den Differentiationsregeln klar. Im Punkt $x = 0$ gilt

$$F'(0) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ 0 \neq \epsilon}} \frac{F(\epsilon) - F(0)}{\epsilon - 0} = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ 0 \neq \epsilon}} \epsilon \cos(\epsilon^{-1}) = 0\,.$$

Also gilt $F'(0) = f(0)$. Die differenzierbare Funktion F ist eine Stammfunktion der integrierbaren Funktion f. Mit Aussage (1) des Satzes 17.18 erhalten wir

$$0 = F(1) - F(-1) = \int_{-1}^{1} F'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,.$$

Diesmal verwenden wir, dass die Funktion F gerade ist. □

Es gibt differenzierbare Funktionen $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, deren erste Ableitungen nicht Riemann-integrierbar sind. Mit anderen Worten gibt es Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die nicht Riemann-integrierbar sind aber trotzdem Stammfunktionen besitzen.

Beispiel 17.21 (Eine nicht-integrierbare Funktion mit Stammfunktionen)**.** Die Funktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin(x^{-1})\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar mit

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \sin(x^{-1}) - x^{-\frac{1}{2}} \cos(x^{-1})\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Die Differenzierbarkeit in Punkten aus $(0, 1]$ ist nach der Produktregel klar. Die Differenzierbarkeit in $x = 0$ folgt aus

$$F'(0) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ 0 < \epsilon}} \frac{F(\epsilon) - F(0)}{\epsilon - 0} = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ 0 < \epsilon}} \epsilon^{\frac{1}{2}} \sin(\epsilon^{-1}) = 0$$

Die Funktion $f = F'$ ist in $x = 0$ unstetig und in $(0, 1]$ unendlich oft stetig differenzierbar. Weil $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}} \cos(x^{-1})$ auf $(0, 1]$ eine unbeschränkte Funktion definiert, ist f auf $[0, 1]$ unbeschränkt. Also ist f nach Satz 17.10 keine integrierbare Funktion. Nach Konstruktion ist F eine Stammfunktion von f. □

Leibniz-Schreibweise 17.22. *In der* Leibniz-Schreibweise *werden Ableitungen als* Differentialquotient

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x)$$

notiert. Nach dem ersten Hauptsatz gilt

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{dF}{dx}(x)\,dx\,.$$

Allerdings setzt diese Formel voraus, dass F differenzierbar und F' integrierbar ist. Das Beispiel 17.21 *zeigt, dass die zweite Voraussetzung nicht erfüllt zu sein braucht, wenn die erste Voraussetzung erfüllt ist.*

Der erste Version des Hauptsatzes gibt eine Antwort auf die eingangs gestellte Rekonstruktionsfrage (1). Der zweite Version beantwortet die Frage (2) nach der Existenz von Stammfunktionen.

Satz 17.23 (Hauptsatz. Zweite Version)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gelten:*

(1) *f ist integrierbar.*

(2) *Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$$

ist eine Stammfunktion von f mit $F(a) = 0$.

Beweis. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind alle Einschränkungen $f \mid [a, \xi]$ mit $\xi \in [a, b]$ integrierbar. Also existieren sämtliche Integrale, die die Funktion F definieren. Sei $\xi \in [a, b]$. Wir zeigen, dass F in ξ differenzierbar ist. Für alle $x \in [a, b]$ mit $x \neq \xi$ gilt

$$\frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} - f(\xi) = \frac{1}{x - \xi} \int_\xi^x (f(t) - f(\xi))\,dt\,.$$

Sei $\epsilon > 0$. Weil f in ξ stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit

$$|f(t) - f(\xi)| \leq \epsilon$$

für $t \in [a, b]$ mit $|t - \xi| \leq \delta$. Aus den fundamentalen Ungleichungen folgt

$$\left|\frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} - f(\xi)\right| \leq \frac{1}{|x - \xi|} \cdot \epsilon \cdot |x - \xi| = \epsilon$$

für $x, \xi \in [a, b]$ mit $x \neq \xi$ und $|x - \xi| \leq \delta$. Folglich ist F in ξ differenzierbar mit

$$F'(\xi) = f(\xi)\,.$$

Außerdem gilt $F(\xi) = 0$. Damit ist der Beweis beendet. $\square$

Beispiel 17.24. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1/t$ ist stetig. Nach dem zweiten Hauptsatz 17.23 ist $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\xi) = \int_1^\xi \frac{dx}{x}$$

für alle $\xi > 0$ eine Stammfunktion von f mit $F(1) = 0$. Siehe Beispiel 17.32. □

Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktionen besitzen. Wie Beispiel 17.26 zeigt, reicht ein einziger Unstetigkeitspunkt aus, um die Existenz von Stammfunktionen auszuschließen. Wir benötigen für dieses Beispiel den Zwischenwertsatz 17.25 für Ableitungen.

Satz 17.25 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)**.** *Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $F'(a) \neq F'(b)$. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\eta \in \mathbb{R}$ mit*

$$\min\{F'(a), F'(b)\} < \eta < \max\{F'(a), F'(b)\}$$

eine reelle Zahl $\xi \in (a,b)$ mit $\eta = F'(\xi)$.

Wir heben ausdrücklich hervor, dass in Satz 17.25 die Stetigkeit der ersten Ableitung nicht vorausgesetzt wird.

Beispiel 17.26 (Eine integrierbare Funktion ohne Stammfunktionen)**.** Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ die integrierbare Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [-1,0)\,, \\ 1\,, & x \in [0,1]\,. \end{cases}$$

Die Funktion $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0\,, & x \in [-1.0)\,, \\ x\,, & x \in [0,1] \end{cases}$$

ist im Nullpunkt nicht differenzierbar. Also ist F keine Stammfunktion von f. Die Funktion f kann nach 17.25 *keine* Stammfunktion besitzen. Andernfalls müsste f jeden Wert zwischen $f(-1) = 0$ und $f(1) = 1$ annehmen. Aber es gilt

$$(\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}) : \quad F'(x) = f(x)\,.$$

Das heißt, in allen Punkten, in denen f stetig ist, ist F differenzierbar und die Ableitung von F stimmt mit dem Funktionswert von f überein. Siehe Hauptsatzvariante 17.27 und Beispiel 17.28. □

Satz 17.27 (Hauptsatz. Dritte Version)**.** *Seien* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *gegeben. Sei* $\xi \in [a,b]$ *ein beliebiger Punkt. Sei dann* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Funktion und* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *die wohldefinierte Funktion mit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen (1), (2), (3), (4), (5).

(1) f *ist beschränkt.*

(2) *Für alle* $x,\ y \in [a,b]$ *gilt*

$$|F(x) - F(y)| \leq \left(\sup_{a\leq\xi\leq b} |f(\xi)|\right) \cdot |x-y|\,.$$

(3) F *ist Lipschitz-stetig.*

(4) *Wenn* f *in* ξ *stetig ist, dann ist* F *in* ξ *differenzierbar mit*

$$F'(\xi) = f(\xi)\,.$$

(5) *Wenn* f *stetig ist, dann ist* F *eine Stammfunktion von* f.

Beispiel 17.28 (Sägezahnfunktion mit zwei Zähnen. Fortsetzung von 17.16)**.** Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0,1)\,, \\ x-1\,, & x \in [1,2)\,, \\ 0\,, & x = 2 \end{cases}$$

ist Riemann-integrierbar. Die Funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\,x^2\,, & x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}\,x^2 - x + 1\,, & x \in [1,2] \end{cases}$$

ist stetig. Außerhalb der beiden Unstetigkeitsstellen $x = 1$ und $x = 2$ der Sägezahnfunktion f ist F differenzierbar mit

$$(\forall x \in [0,2] \setminus \{1,2\}) : \quad F'(x) = f(x)\,.$$

Siehe Satz 17.27. $\square$

Eine Tafel mit den ersten Ableitungen stetig differenzierbarer Funktionen kann als Integraltafel gelesen werden. Dies folgt aus der zweiten Version 17.23 des Hauptsatzes. *Partielle Integration* und *Substitutionregel* ergeben weitere Möglichkeiten, Integrale zu bestimmen.

Satz 17.29 (Partielle Integration)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gelten:*

(1) *Die Funktionen $f'g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $fg' : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind stetig und daher integrierbar.*

(2) *Es gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Beweis. Aussage (1) ist klar. Die Stetigkeitsaussagen folgen aus der Regel (3) in Satz 6.15. Die Integrierbarkeit von $f'g$ und fg' Satz folgen dann aus 17.7. Mit dem Hauptsatz 17.18 und der Produktregel (3) für differenzierbare Funktionen in Satz 10.14 folgt

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)\,dx\,.$$

Damit ist auch (2) bewiesen. □

Beispiel 17.30. Für $x \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned}\int_1^x \log(t)\,dt &= \int_1^x 1 \cdot \log(t)\,dt \\ &= \int_1^x t' \cdot \log(t)\,dt \\ &= [t\log(t)]_1^x - \int_1^x t \cdot \log'(t)\,dt \\ &= [t\log(t)]_1^x - \int_1^x 1\,dt \\ &= x\log(x) - x + 1\,.\end{aligned}$$

Die Funktion $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = x\log(x) - x + 1$$

ist eine Stammfunktion des Logarithmus mit $F(1) = 0$. □

Satz 17.31 (Substitutionsregel)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ gegeben. Es seien die Voraussetzungen* (1), (2), (3) *erfüllt.*

(1) *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig.*

(2) *$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar.*

(3) $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$.

Dann gelten die folgenden Aussagen (4) *und* (5).

(4) *Die Funktionen* $x \mapsto f(x)$ *und* $t \mapsto f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ *sind auf den Intervallen* $\varphi([\alpha, \beta])$ *respektive* $[\alpha, \beta]$ *stetig und daher integrierbar.*

(5) *Es gilt*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt\,.$$

Beweis. Aussage (4) ist klar. Dabei verwenden wir die Sätze 6.15, 6.16 und 17.7. Nachweis von (5). Nach dem Hauptsatz 17.23 besitzt die Funktion f Stammfunktionen. Sei F eine Stammfunktion von f. Mit der Kettenregel 10.15 für differenzierbare Funktionen und dem Hauptsatz 17.18 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\; dt &= \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\; dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t))\, dt \\
&= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x)\; dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\; dx\,.
\end{aligned}$$

Damit ist (5) bewiesen. Im Beweis der Substitutionsregel verwenden wir beide Versionen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sowie die Kettenregel für die Ableitung. □

Als erste Anwendung der Substitutionsregel zeigen wir die Existenz einer Funktion auf $[0, \infty)$, die die Wachstumsbedingung und das Logarithmengesetz aus Satz 3.1 erfüllt. Der Logarithmus kann demnach mit Hilfe der Integralrechnung definiert werden. Die alte Definition des Funktionswertes $\log(x)$ einer Stelle $x > 0$ lässt sich nach den Ausführungen in 17.9 als Grenzwert einer geeigneten Riemann-Folge deuten.

Beispiel 17.32 (Logarithmus)**.** Wir definieren $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}_+): \quad f(\xi) = \int_1^{\xi} \frac{du}{u}\,.$$

Es gilt $f(1) = 0$. Nach dem Hauptsatz 17.23 ist f auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}_+): \quad f'(\xi) = \frac{1}{\xi}\,.$$

Die Integralrechung zeigt außerdem, dass die Funktion f das Logarithmengesetz, die Wachstumsbedingung und die Grenzwertdarstellung aus Satz 3.1 erfüllt.

(1) Seien x, $y \in (0,\infty)$ beliebig gewählt. Sei $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$\varphi(t) = ty\,, \quad \varphi'(t) = y\,, \quad \varphi(1) = y\,, \quad \varphi(x) = xy\,.$$

Die Intervalladditivität des Integrales und Substitutionsregel liefern das Logarithmengesetz

$$\begin{aligned} f(xy) &= \int_x^{xy} \frac{du}{u} \\ &= \int_y^{xy} \frac{du}{u} + \int_1^y \frac{du}{u} \\ &= \int_1^x \frac{y\,dt}{ty} + \int_1^y \frac{du}{u} = f(x) + f(y)\,. \end{aligned}$$

(2) Zuerst betrachten wir den Fall $x \in [1,\infty)$. Aus der Definition von f, der Positivität der Integrale und den fundamentalen Ungleichungen für Integrale folgt

$$(\forall x \in [1,\infty)): \quad 0 \le f(x) = \int_1^x \frac{du}{u} \le 1 \cdot |x-1| = x - 1\,.$$

Nun betrachten wir $x \in (0,1]$. Die Positivität des Integrals liefert

$$0 \le 1 - x = \int_x^1 1\,du \le \int_x^1 \frac{du}{u} = -f(x)\,.$$

Damit erhalten wir

$$(\forall x \in (0,1]): \quad f(x) \le x - 1 \le 0\,.$$

(3) In Beispiel 17.9 haben wir das definierende Integral mit Hilfe einer passend gewählten Riemann-Folge ausgewertet und gezeigt, dass

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+): \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$$

gilt. Siehe Satz 3.1. □

Leibniz-Schreibweise 17.33. *In der Leibniz-Schreibweise nimmt die Substitutionsregel die sugestive Form*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

an. Dabei gehen die Integrale und ihre Grenzen durch die formalen Ersetzungen

$$x = x(t)\,, \quad x_1 = x(t_1)\,, \quad x_2 = x(t_2)\,, \quad dx = \frac{dx}{dt}\,dt$$

auseinander hervor. Außerdem werden gewisse Ausdrücke formal durch Kürzen eliminiert. Das Ergebnis dieser Manipulationen ist sorgfältig zu begründen.

Jetzt wird auch klar, warum die Integrationsvariable x als Differential dx am Ende des Integralsymbols wiederholt wird.

Die Leibniz-Schreibweise ist von großem heuristischen Wert. Allerdings ist manchmal einige Umsicht erforderlich, wie die Erörterung des Integralsatzes von Gauß-Green in 21.3 *zeigt.*

Integranden, die rationale Funktionen in x und $\sqrt{1-x^2}$ sind, können durch die vier Standard-Substitutionen

$$x = \varphi_1(t) = \pm\cos(t)\,, \quad x = \varphi_2(t) = \pm\sin(t)$$

in Integranden umgeformt werden, die rationale Funktionen in $\cos(t)$ und $\sin(t)$ sind.

Beispiel 17.34 (Substitution und partielle Integration)**.** Es gilt

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^\pi \sin^2(t)\,dt = \int_0^\pi \cos^2(t) = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Die Substitution $x = \varphi(t)$ mit

$$x = \varphi(t) = -\cos(t)\,, \quad \varphi(0) = -1\,, \quad \varphi(\pi) = 1\,, \quad \varphi'(t) = \sin(t)$$

liefert

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\cos(0)}^{-\cos(\pi)} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2(t)}\,\sin(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi \sin^2(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Die Funktion $t \mapsto -\cos(t)$ ist auf dem Intervall $[0,\pi]$ streng monoton wachsend. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt &= -\int_0^\pi \cos'(t)\sin(t)\,dt \\
&= -[\cos(t)\sin(t)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\sin'(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi \cos^2(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Aus dem Satz des Pythagoras und der Normierung des Integrals folgt

$$\int_0^\pi \cos^2(t)\,dt + \int_0^\pi \sin^2(t)\,dt = \int_0^\pi 1\,dt = \int_0^\pi dt = \pi\,.$$

Siehe Beispiel 19.3. Nun folgt die Behauptung. □

Integranden, die rationale Funktionen in $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind, können durch die Standard-Substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = \varphi(t) = 2\arctan(x)$$

in Integranden umgeformt werden, die rationale Funktionen in t sind. Dabei gelten die Beziehungen

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}.$$

Beispiel 17.35. Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}\,dx = \log(2).$$

Der Nennner des Integranden hat im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ keine Nullstelle. Es gilt

$$2 \leq 1+\cos(x)+\sin(x) \leq 1+\sqrt{2}$$

für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Die Standard-Substitution liefert

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot(1+t^2)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{1+t}\,dt \\
&= \log|1+t| + c_1 \\
&= \log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c_2 .
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Substitutionsregel zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwendet. Bei dieser Vorgehensweise ist vor dem Einsetzen der gegebenen Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ noch die Rücksubstitution vorzunehmen. Einsetzen der Grenzen ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}\,dx &= \left[\log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \log\left|1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - \log|1+\tan(0)| \\
&= \log|1+1| - \log|1| = \log(2).
\end{aligned}$$

□

Treten Wurzeln im Integranden auf, dann ist es manchmal erfolgreich, den Radikanden zu substituieren.

Beispiel 17.36. Es gilt

$$\int_0^2 \frac{3x^7 - 21x^3}{\sqrt{x^4+9}}\, dx = 1\,.$$

Die Substitution

$$x^4 + 9 = t\,, \quad x = \varphi(t)\,, \quad t = t(x)\,, \quad \frac{dt}{dx} = 4x^3\,, \quad \varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4x^3}$$

des Integranden ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{3x^7 - 21x^3}{\sqrt{x^4+9}}\, dx &= \tfrac{3}{4} \int_9^{25} \frac{(t-16)}{\sqrt{t}}\, dt \\ &= \tfrac{3}{4}\, \Big[\, \tfrac{2}{3} t\sqrt{t} - 32\sqrt{t}\, \Big]_9^{25} \\ &= \Big[\sqrt{x^4+9}\, \left\{ \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{39}{2} \right\} \Big]_0^2 = 1\,.\end{aligned}$$

□

Wir lassen nun zu, dass sich die Grenzen stetig differenzierbar verändern. Dabei setzen wir voraus, dass der Integrand stetig ist.

Satz 17.37 (Variable Grenzen)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Es seien die Voraussetzungen* (1), (2), (3) *erfüllt.*

(1) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig.*

(2) φ, $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seien stetig differenzierbar.*

(3) $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$, $\psi([a, b]) \subseteq [a, b]$.

Dann ist die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$$

differenzierbar. Es gilt

$$F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

für alle x, $y \in [a, b]$.

Abschließend behandeln wir die Differentiation unter dem Integral. Dabei handelt des sich um die Vertauschung der beiden Grenzprozesse Differentiation und Integration.

Satz 17.38 (Differentiation unter dem Integral)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ gegeben. Es seien die Voraussetzungen* (1), (2) *erfüllt.*

(1) *$f : [a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ sei stetig.*

(2) *Die* partielle Ableitung $\partial_2 f : [a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$(\partial_2 f)(t, x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(t, \xi) - f(t, x)}{\xi - x}$$

existiere und sei stetig.

Dann ist die Funktion $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$$

differenzierbar. Es gilt

$$F'(x) = \int_a^b (\partial_2 f)(t, x)\, dt\,.$$

für alle $x \in [\alpha, \beta]$.

Leibniz-Schreibweise 17.39. *Wir schreiben Satz* 17.38 *in der suggestiven Form*

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(t, x)\, dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt\,.$$

18 Ergänzung: Das Integrabilitätskriterium von Lebesgue

Satz und Definition 18.1 (Nullmengen)**.**

(1) *Eine Menge A heißt* endlich*, wenn eine der beiden folgenden Alternativen* (i) *oder* (ii) *erfüllt ist.*

 (i) $A = \emptyset$.

 (ii) *Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to A$.*

(2) *Eine Menge A heißt* abzählbar unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ gibt.*

(3) *Eine Menge heißt* abzählbar*, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.*

(4) *Eine Menge A ist genau abzählbar, wenn es eine Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathcal{N} \to A$ gibt. Die Abbildung φ heißt dann eine* Abzählung *der Menge A.*

(5) *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine* Nullmenge*, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ und reelle Zahlen a_ν, $b_\nu \in \mathbb{R}$ für alle $\nu \in \mathcal{N}$ derart gibt, dass die beiden folgenden Bedingungen* (i) *und* (ii) *erfüllt sind.*

 (i) $A \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} [a_\nu, b_\nu]$.

 (ii) $\sum_{\nu \in \mathcal{N}} |b_\nu - a_\nu| \leq \epsilon$.

 Im Fall $\mathcal{N} = \emptyset$ ist die Vereinigungsmenge in (i) *die leere Menge und die Summe in* (ii) *gleich* 0.

(6) *Alle abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Nullmengen.*

(7) *Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist eine Nullmenge.*

(8) *Die Cantor-Menge* C *ist eine überabzählbare Nullmenge. Siehe* 8.1.

Satz 18.2 (Integrabilitätskriterium von Lebesgue)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine Nullmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ derart gibt, dass f in allen Punkten der Menge $[a, b] \setminus A$ stetig ist.*

19 Geometrische Anwendungen des Integrals

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer geometrischen Deutung des Riemann-Integrals. Aus der geometrischen Deutung der Riemann-Summen ergibt sich eine Deutung als Fächeninhalt. Wir betrachten in diesem Abschnitt *ebener Bereiche erster Art*. Im Abschnitt über das Doppelintegral führen wir diese Überlegungen weiter. Als zweite Anwendung berechnen wir die *Länge* stetig differenzierbarer ebener Wege.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare nicht-negative Funktion. Die Riemann-Summen $S(f,Z,\xi)$ und die Ober- und Untersummen $S(f,Z)$ respektive $s(f,Z)$ lassen sich als Summen von Flächeninhalten achsenparalleler Rechtecke deuten. Diese Summen approximieren den Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von f. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

betrachten wir als Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von f.

Definition 19.1. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Seien φ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Die Menge*

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\,,\ a \leq x \leq b\}$$

heißt die Fläche *zwischen den Graphen von φ und ψ. Wir nennen*

$$\mathcal{A}(B) = \int_a^b ((\psi(x) - \varphi(x))\,dx$$

den Flächeninhalt *von B. Im Fall, dass φ die Nullfunktion ist, heißt die Menge B die Fläche* unterhalb *des Graphen von ψ. Wenn die Funktionen φ und ψ stetig sind, dann nennen wir die Menge B einen* ebenen Bereich erster Art. *Ebene Bereiche erster Art sind kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.*

Beispiel 19.2 (Ebenes Dreieck)**.** Seien b, $h \in \mathbb{R}_+$ und $\xi \in (0,b)$ gegeben. Sei $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{\xi}\,, & x \in [0,\xi]\,, \\[2ex] h - \dfrac{h(x-\xi)}{b-\xi}\,, & x \in [\xi,b] \end{cases}$$

definiert. Die Fläche B unter dem Graphen von f ist das ebene Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)^t$, $(b,0)^t$ und $(\xi,h)^t$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(B) &= \int_0^b f(x)\,dx \\ &= \int_0^\xi \frac{hx}{\xi}\,dx + \int_\xi^b \left(h - \frac{h(x-\xi)}{b-\xi}\right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{h\xi}{2} + h(b-\xi) - \frac{h(b^2-\xi^2)}{2(b-\xi)} + h\xi = \frac{hb}{2}$$

in Übereinstimmung mit der Formel für den elementargeometrischen Flächeninhalt ebener Dreiecke. □

Beispiel 19.3 (Die Kreiszahl π)**.** Seien φ, $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}\,, \quad \psi(x) = \sqrt{1-x^2}$$

definiert. Die Fläche B zwischen den Graphen der Funktionen φ und ψ ist die abgeschlossene Kreisscheibe um den Nullpunkt vom Radius Eins. Mit dem Ergebnis aus Beispiel 17.34 ergibt sich

$$\mathcal{A}(B) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi\,.$$

Das Ergebnis von Archimedes wird von der Differential- und Integralrechnung reproduziert. Nach den Aussagen (9) und (10) des Satzes 5.3 ist $\frac{\pi}{2}$ die kleinste positive Nullstelle des Cosinus. Siehe Beispiel 19.11. □

Wir wenden uns nun den ebenen Wegen zu. Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der euklidischen Norm $\|\,.\,\|$ versehen.

Definition 19.4. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Zerlegung*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

von $[a,b]$ derart gibt, dass sich die Einschränkungen $f \mid (t_{k-1}, t_k)$ auf $[t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar fortsetzen lassen. Wir nennen eine solche Zerlegung eine ausgezeichnete *Zerlegung der Funktion f. Wenn f stetig differenzierbar ist, dann ist f stückweise stetig differenzierbar.*

Definition 19.5 (Ebene Wege)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben.*

(1) *Ein* ebener Weg *ist eine stetige Abbildung*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}.$$

Die Komponentenfunktionen $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ von γ sind folglich stetig. Das Intervall $[a,b]$ ist das Parameterintervall *von γ.*

(2) *Ein ebener Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt* einfach geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt und die Einschränkung $\gamma \mid (a,b)$ injektiv ist.*

(3) *Ein ebener Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt* differenzierbar, stetig differenzierbar *respektive* stückweise stetig differenzierbar*, wenn die beiden Komponentenfunktionen γ_1 und γ_2 diese Eigenschaften besitzen.*

Definition 19.6 (Geschwindigkeit)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

ein differenzierbarer ebener Weg. Die Abbildung

$$\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^2 , \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix}$$

heißt das Geschwindigkeitsfeld *des Weges γ. Entsprechend heißen $\gamma'(t)$ und $\|\gamma'(t)\|$ der* Geschwindigkeitsvektor *respektive die* Geschwindigkeit *zum Parameterwert $t \in [a,b]$.*

Die Definition 19.6 kann auf stückweise stetig differenzierbare Wege sinngemäß übertragen werden.

Definition 19.7 (Länge eines Weges)**.** *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

ein ebener Weg. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ eine Zerlegung mit den Teilungspunkten

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b .$$

Wir nennen die Summe

$$s_\gamma(Z) = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

die Länge des Polygonzuges*, der dem Weg γ mittels Z einbeschrieben ist. Wenn die Bedingung*

$$(\exists s \in \mathbb{R}_{\geq 0}) : \quad s = \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} s_\gamma(Z)$$

erfüllt ist, dann heißt der ebene Weg γ rektifizierbar*. In diesem Fall wird die reelle Zahl s die* Länge *des ebenen Weges γ genannt und mit $\mathcal{L}(\gamma)$ bezeichnet.*

Nach diesen Vorbereitungen können wir die folgenden beiden Fragen untersuchen:

(1) Welche ebenen Wege sind rektifizierbar?

(2) Wie lässt sich ihre Länge berechnen?

Wieder lassen wir uns vom ersten Mittelwertsatz leiten. Wir nehmen an, dass der ebene Weg stetig differenzierbar ist. Für die Komponenten gilt

$$|\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| \approx |\gamma_i'(\xi_k)| \cdot (t_k - t_{k-1}),$$

wobei die $\xi_k \in [t_{k-1}, t-k]$ irgendwelche Zwischenpunkte sind. Es gibt im Allgemeinen keine Zwischenpunkte derart, dass in beiden Näherungen simultan Gleichheit gilt. Wir erhalten

$$s_\gamma(Z) = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \approx \sum_{k=1}^{n} \|\gamma'(\xi_k)\| \cdot (t_k - t_{k-1})$$

und vermuten, dass dem Grenzwert rechter Hand beim Grenzübergang $|Z| \to 0$ die Supremumsbildung linker Hand entspricht. Eine sorgfältige Beweisführung bestätigt diese Vermutung.

Bevor wir den Satz über die Rektifizierbarkeit von Wegen formulieren, erweitern wir die Definition des Riemann-Integrals. Offenbar kann eine integrierbare Funktion an endlich vielen Stellen abgeändert werden, ohne dass sich der Wert des Integrales ändert. Daher kann zugelassen werden, dass der Integrand an endlich vielen Stellen nicht definiert ist.

Definition 19.8 (Ergänzung von Definition 17.2). *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

eine Zerlegung des Intervalles $[a, b]$ und $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit

$$[a, b] \setminus \{t_0, \ldots, t_n\} \subseteq D \subseteq [a, b].$$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar *über $[a, b]$, wenn die Einschränkungen $f \mid (t_{k-1}, t_k)$ integrierbare Fortsetzungen $f_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}$ besitzen. Im Falle der Integrierbarkeit setzen wir*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k(t)\, dt.$$

Satz 19.9. *Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

ein stückweise stetig differenzierbarer ebener Weg. Dann ist γ rektifizierbar mit

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Das Integral ist dabei im Sinne von Definition 19.8 *aufzufassen.*

Beispiel 19.10 (Geradenstück)**.** Seien x, $y \in \mathbb{R}^2$ beliebige Punkte. Der differenzierbare Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = x + t(y-x)$$

verbindet x und y längs eines Geradenstücks. Es gilt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|y-x\|\, dt = \|y-x\|\,.$$

Die Länge eines geraden Weges ist gleich dem euklidischen Abstand der Endpunkte. Vergleiche Definition 19.7. □

Beispiel 19.11 (Umfang des Einheitskreises)**.** Der stetig differenzierbare Weg

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

durchläuft jeden Punkt $x \neq (1,0)$ des Einheitskreises um den Nullpunkt genau einmal. Es gilt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Das Ergebnis von Archimedes wird von der Differential- und Integralrechnung reproduziert. Siehe Beispiel 19.3. □

Der Parameterbereich eines ebenen Weges ist nach Definiton ein kompaktes Intervall. Oft ist sinnvoll beliebige Intervalle als Parameterbereiche zuzulassen. Wir sprechen dann von ebenen Kurven. Als Beispiel behandeln wir in 19.13 die logarithmischen Spiralen.

Definition 19.12 (Ebene Kurven)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall.*

(1) *Eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ heißt eine* ebene Kurve.

(2) *Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine ebene Kurve*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2\,, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

heißt k-mal differenzierbar, k-mal stetig differenzierbar oder unendlich oft stetig differenzierbar, wenn die beiden Komponentenfunktionen $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ mit $i = 1, 2$ diese Eigenschaft besitzen.

Beispiel 19.13 (Logarithmische Spiralen)**.** Sei $\mathcal{E}_2 = \{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $\beta \neq 0$ gegeben. Die Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$r(\theta) = \alpha e^{\beta\theta} > 0$$

ist unendlich oft stetig differenzierbar und streng monoton. Die unendlich oft differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos(\theta) \\ r(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

ist die *logarithmische Spirale* mit den Parametern α und β.

Den Fall $\beta = 0$ lassen wir hier fort. In diesem Fall wird die Kreislinie vom Radius α um den Nullpunkt unendlich oft durchlaufen. Siehe Beispiel 19.11. Außerdem können wir uns auf den Fall $\beta > 0$ beschränken, indem wir gegebenenfalls θ durch $-\theta$ ersetzen.

Eine geometrische Interpretation der Parameter α und β wird in den Unterabschnitten (3), (6), (7) gegeben. Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gelten

$$\|\gamma(\theta)\| = r(\theta) > 0\,, \quad \cos(\measuredangle(\gamma(\theta), e_1)) = \cos(\theta)\,, \quad \measuredangle(\gamma(\theta), e_1) \in [0, \pi]\,.$$

Der reelle Parameter θ wird als orientierter Winkel gedeutet. Das Paar $(r(\theta), \theta)$ die Darstellung des Kurvenpunktes $\gamma(\theta)$ in *ebenen Polarkoordinaten.* Die *Polarachse* $\theta = 0$ ist die erste Koordinatenachse $\mathbb{R}e_1$. Der Strahl

$$\Gamma(\theta) = \{t\gamma(\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0\}$$

mit dem Nullpunkt als Anfangspunkt heißt *Polstrahl* durch den Punkt $\gamma(\theta)$. Wir betrachten nur den Fall $\beta > 0$.

(1) Die Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend. Es gelten

$$r(0) = \alpha\,, \quad \lim_{\theta \to -\infty} r(\theta) = 0\,, \quad \lim_{\theta \to \infty} r(\theta) = \infty\,.$$

(2) Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt $\gamma(\theta) \neq 0$. Es gilt

$$\lim_{\theta \to -\infty} \gamma(\theta) = 0\,.$$

Die Kurve γ zieht sich für $\theta \to -\infty$ spiralig auf den Nullpunkt zusammen, ohne diesen Punkt zu erreichen. Der Nullpunkt ist ein asymptotischer Punkt. Der Nullpunkt heißt *Pol* der Spirale.

(3) Die Kurve γ schneidet die Polachse genau dann, wenn $\theta = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Insbesondere für $\theta = 0$ gilt

$$\gamma(0) = \alpha e_1\,.$$

(4) Die Kurve γ umläuft den Nullpunkt spiralförmig mit unbeschränkt wachsendem Radius $r(\theta)$ für $\theta \to \infty$. Dabei wird der Nullpunkt unendlich oft im positiven Sinn umlaufen.

(5) Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Wir berechnen den Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(\theta)$ und seine euklidische Norm $\|\gamma'(\theta)\|$. Komponentenweises Differenzieren ergibt

$$\begin{aligned}\gamma'(\theta) &= \begin{pmatrix} r'(\theta)\cos(\theta) - r(\theta)\sin(\theta) \\ r'(\theta)\sin(\theta) + r(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'(\theta) \\ r(\theta) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Weil die ebenen Drehmatrizen

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

die euklidische Norm erhalten, folgt

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} .$$

(6) Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Wir berechnen den Winkel

$$\measuredangle(\gamma'(\theta), \gamma(\theta)) \in [0, \pi]$$

unter dem die Spirale γ im Punkt $\gamma(\theta)$ den Polstrahl $\Gamma(\theta)$ schneidet. Es zeigt sich, dass dieser Winkel nicht von θ abhängt. Mit (5) folgt

$$\gamma'(\theta) \bullet \gamma(\theta) = r'(\theta) \cdot r(\theta) .$$

Eine weitere Anwendung von (5) ergibt

$$\begin{aligned}\cos(\measuredangle(\gamma'(\theta), \gamma(\theta))) &= \frac{\gamma'(\theta) \bullet \gamma(\theta)}{\|\gamma'(\theta)\| \cdot \|\gamma(\theta)\|} \\ &= \frac{r'(\theta) \cdot r(\theta)}{\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} \cdot r(\theta)} \\ &= \frac{r'(\theta)}{\sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}} \\ &= \frac{\alpha\beta e^{\beta\theta}}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 e^{2\beta\theta} + \alpha^2 e^{2\beta\theta}}} \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} \in (0,1) .\end{aligned}$$

Die Spirale γ schneidet im Punkt $\gamma(\theta)$ den entsprechenden Polstrahl $\Gamma(\theta)$ unter dem Winkel $\tau \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit

$$\cot(\tau) = \frac{\cos(\tau)}{\sin(\tau)} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2+1}}{1} = \beta > 0 .$$

Der Winkel τ hängt nicht von θ ab. Dieses Ergebnis hat R. Descartes 1638 gefunden.

(7) Seien θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$ mit $\theta_1 < \theta_2$ gegeben. Mit $\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2)$ bezeichnen wir die Länge des ebenen Weges, der durch Einschränkung der logarithmischen Spirale γ auf das kompakte Intervall $[\theta_1, \theta_2]$ entsteht. Nach Satz 19.9 gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\gamma'(\theta)\| \, d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\alpha^2 \beta^2 e^{2\beta\theta} + \alpha^2 e^{2\beta\theta}} \, d\theta \\ &= \alpha \sqrt{\beta^2 + 1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{\beta\theta} \, d\theta \\ &= \alpha \cdot \frac{\sqrt{\beta^2+1}}{\beta} \cdot (e^{\beta\theta_2} - e^{\beta\theta_1}) \,.\end{aligned}$$

Für alle $\theta_2 \in \mathbb{R}$ gilt die asymptotische Formel

$$\lim_{\theta_1 \to -\infty} \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2) = \alpha \cdot \frac{\sqrt{\beta^2+1}}{\beta} \cdot e^{\beta\theta_2} = \frac{r(\theta_2)}{\cos(\tau)} \,.$$

Insbesondere für $\theta_2 = 0$ gilt

$$\lim_{\theta_1 \to -\infty} \mathcal{L}(\theta_1, 0) = \alpha \cdot \frac{\sqrt{\beta^2+1}}{\beta} = \frac{\alpha}{\cos(\tau)} \,.$$

Diese Formeln hat E. Torricelli 1645 gefunden.

□

20 Das Doppelintegral

In diesem Abschnitt betrachten wir Integrale von Funktionen in zwei Variablen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf achsenparallele Rechtecke und *Elementarbereiche* als Integrationsbereiche.

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ sei mit der euklidischen Norm $\| \,.\, \|$ versehen.

Definition 20.1. *Seien a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i < b_i$ und $i = 1, 2$ gegeben. Die Zerlegungen Z_1 und Z_2 mit den Teilungspunkten*

$$a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_1} = b_1\,, \quad a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n_2} = b_2$$

bilden eine Zerlegung $Z = (Z_1, Z_2)$ *des Rechtecks $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ mit der* Feinheit

$$|Z| = \max\{|Z_1|, |Z_2|\}\,.$$

Die Zwischenpunkte $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ und $\eta_l \in [y_{l-1}, y_l]$ bilden die beiden Zwischenvektoren

$$\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} \qquad \mathrm{H} = (\eta_1, \ldots, \eta_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}\,.$$

Sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Die Summe

$$S(f, Z, \Xi, \mathrm{H}) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} f(\xi_k, \eta_l) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_l - y_{l-1})$$

heißt Riemann-Summe *von f bezüglich $Z = (Z_1, Z_2)$ und Ξ und* H. *Sei $\mathcal{Z}(R)$ die Menge der Zerlegungen von R und $\mathcal{RS}(f)$ die Menge der Riemann-Summen von f.*

Definition 20.2. *Eine Folge $(S(f, Z_\nu, \Xi_\nu, \mathrm{H}_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ von Riemann-Summen heißt eine* Riemann-Folge *von f, wenn die Feinheiten $|Z_\nu|$ eine Nullfolge bilden. Es sei $\mathcal{RF}(f)$ die Menge der Riemann-Folgen von f.*

Definition 20.3. *Seien a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i < b_i$ und $i = 1, 2$ gegeben. Eine Funktion $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ heißt* Riemann-integrierbar *oder* integrierbar *über R, wenn die Bedingung*

$$(\exists S \in \mathbb{R})(\forall (S_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathcal{RF}(f)) : \quad S_\nu \to S\,.$$

erfüllt ist. Im Falle der Existenz heißt die reelle Zahl S das Doppelintegral *oder* Integral *von f über R und wird mit*

$$S = \iint_R f = \iint_R f(x, y)\, d(x, y) = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

bezeichnet. Wenn $a_1 = b_1$ oder $a_2 = b_2$ gilt, dann wird zusätzlich definiert, dass f integrierbar ist mit

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = 0\,.$$

Satz 20.4. *Seien a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ und $i = 1, 2$. Sei $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) **(Linearität).** *Seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ reelle Konstante und f, $g : R \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann ist die Funktion $\alpha f + \beta g : R \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto \alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ integrierbar. Es gilt*

$$\begin{aligned}\iint_R (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy \\ = \alpha \iint_R f(x,y)\, dxdy + \beta \iint_R g(x,y)\, dxdy\,.\end{aligned}$$

(2) **(Positivität).** *Sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in R$. Dann gilt*

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy \geq 0\,.$$

(3) **(Normierung).** *Sei $f : R \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit $f(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in R$ ist integrierbar. Es gilt*

$$\iint_R dxdy = \iint_R 1\, dxdy = \iint_R f(x,y)\, dxdy = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)\,.$$

(4) **(Rechtecks-Additivität).** *Seien $R_1, \dots, R_n \subseteq \mathbb{R}^2$ endlich viele kompakte achsenparallele Rechtecke mit*

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k\,,$$

die paarweise lediglich Randpunkte gemeinsam haben. Eine Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn ihre Einschränkungen auf die Rechtecke R_k integrierbar sind. Wenn f integrierbar ist, gilt

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{R_k} f(x,y)\, dxdy\,.$$

Satz 20.5 (Fundamentale Ungleichungen). *Seien a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ und $i = 1, 2$. Sei $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gelten:*

(1) *f ist beschränkt. Folglich existiert*

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{(x,y) \in R} |f(x,y)|$$

in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

(2) *Es gelten die* fundamentalen Ungleichungen

$$\left| \iint_R f(x,y)\, dxdy \right| \leq \iint_R |f(x,y)|\, dxdy \leq (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \|f\|_\infty\,.$$

Satz 20.6. *Seien a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ und $i = 1, 2$ gegeben. Jede stetige Funktion $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Satz 20.7 (Satz von Fubini für achsenparallele Rechtecke)**.** *Seien a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ und $i = 1, 2$ gegeben. Sei $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen* (1)*,* (2) *und* (3)*.*

(1) *Die Funktion $F_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy$$

ist stetig und damit integrierbar.

(2) *Die Funktion $F_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F_2(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx$$

ist stetig und damit integrierbar.

(3) *Als stetige Funktion ist f integrierbar. Es gilt*

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_{a_1}^{b_1} F_1(x)\, dx = \int_{a_2}^{b_2} F_2(y)\, dy\,.$$

In der Leibniz-Schreibweise nimmt Formel (3) des Satzes von Fubini die Form

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dxdy &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \right) dy\end{aligned}$$

an. Wir sagen, dass die *iterierten Integrale* rechter Hand durch *Vertauschung der Integrationsreihenfolge* auseinander hervorgegangen sind.

Beispiel 20.8. Auf dem kompakten Rechteck $R = [0, 2] \times [0, 3]$ betrachten wir die Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y^2 + y$.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^3 (x^2y^2 + y)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left[\tfrac{1}{3}x^2y^3 + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=3} dx \\ &= \int_0^2 (9x^2 + \tfrac{9}{2})\, dx = \left[3x^3 + \tfrac{9}{2}x\right]_0^2 = 33\,.\end{aligned}$$

Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge und erhalten

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dxdy &= \int_0^3 \left(\int_0^2 (x^2y^2 + y)\, dx \right) dy = \int_0^3 \left[\tfrac{1}{3}x^3y^2 + xy\right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^3 (\tfrac{8}{3}y^2 + 2y)\, dy = \left[\tfrac{8}{9}y^3 + y^2\right]_0^3 = 33\,.\end{aligned}$$

□

Bisher haben wir nur kompakte achsenparallele Rechtecke als Integrationsbereiche zugelassen. Wenn wir stetige Funktionen auf *Elementargebieten* integrieren wollen, müssen wir zunächst Satz 20.6 verallgemeinern, indem wir zulassen, dass die Integranden auf gewissen Ausnahmemenge unstetig sind. Zur bequemen Ausdrucksweise führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition 20.9. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt* höchstens wegweise unstetig, *wenn es endlich viele ebene Wege $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^2$ mit a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \leq b_k$ derart gibt, dass f in allen Punkten der Menge*

$$A \setminus (\gamma_1([a_1, b_1]) \cup \ldots \cup \gamma_n([a_n, b_n]))$$

stetig ist. Nach Definition 19.5 *sind die Abbildungen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ stetig. Nach Satz* 8.5 *sind die Bilder $\gamma_k([a_k, b_k])$ daher kompakt. Wenn f stetig ist, dann ist f höchstens wegweise unstetig.*

Satz 20.10. *Seien a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ und $i = 1, 2$ gegeben. Die Funktion $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und höchstens wegweise unstetig. Dann ist f integrierbar auf R.*

Satz und Definition 20.11. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge.*

(1) *B heißt ein* ebener Bereich erster Art, *wenn es a_1, $b_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 \leq b_1$ und stetige Funktionen φ_1, $\psi_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(x) \leq \psi_2(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$ derart gibt, dass*

$$B = \{(x, y) \mid (\forall x \in [a_1, b_1]) : \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$$

gilt. Ebene Bereiche erster Art sind kompakt.

(2) *B heißt ein* ebener Bereich zweiter Art, *wenn es a_2, $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_2 \leq b_2$ und stetige Funktionen φ_2, $\psi_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_2(y) \leq \psi_2(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$ derart gibt, dass*

$$B = \{(x, y) \mid (\forall y \in [a_2, b_2]) : \varphi_2(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

gilt. Ebene Bereiche zweiter Art sind kompakt.

(3) *B heißt ein* ebener Bereich dritter Art, *wenn B ein ebener Bereich erster und zweiter Art ist.*

(4) *B heißt ein* ebener Elementarbereich, *wenn B ein ebener Bereiche erster oder zweiter Art ist. Ebene Elementarbereiche sind kompakt.*

(5) *B heißt ein* ebener Normalbereich, *wenn es eine endliche Menge $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$ und ebene Elementarbereiche $B_k \subseteq \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathcal{K}$ mit den folgenden Eigenschaften* (i) *und* (ii) *gibt.*

   (i) $B = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} B_k$.

   (ii) *Für k, $l \in \mathcal{K}$ mit $k \neq l$ gilt $B_k \cap B_l \subseteq \mathrm{Rd}(B_k) \cap \mathrm{Rd}(B_l)$.*

   Dann heißt $\{B_k \subseteq \mathbb{R} \mid k \in \mathcal{K}\}$ eine ausgezeichnete Zerlegung *des ebenen Normalbereiches B.*

(6) *Endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Normalbereiche. Insbesondere ist die leere Menge ein ebener Normalbereich.*

(7) *Ebene Elementarbereiche sind ebene Normalbereiche.*

(8) *Ebene Normalbereiche sind kompakte Mengen.*

Beispiel 20.12. Die abgeschlossene Kreisscheibe

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ist ein ebener Bereich dritter Art. $\square$

Beispiel 20.13. Die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq \log(x)\}$$

ist ein ebener Bereich dritter Art. $\square$

Satz und Definition 20.14. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebener Normalbereich. Weiter sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weil B kompakt ist, existieren a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ und $i = 1, 2$ derart, dass*

$$B \subseteq R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

gilt. Dann gelten (1) bis (7).

(1) *Die* triviale Fortsetzung $f_R : R \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f_R(x, y) = \begin{cases} f(x, y)\,, & (x, y) \in B\,, \\ 0\,, & (x, y) \in R \setminus B \end{cases}$$

ist beschränkt und höchstens wegweise unstetig.

(2) *Wegen (1) ist f_R nach Satz 20.10 auf R integrierbar.*

(3) *Das Integral*

$$\iint_R f_R(x, y)\, dxdy$$

hängt nicht von der Wahl des kompakten achsenparallelen Rechtecks R mit $B \subseteq R$ ab.

(4) *Das Integral*

$$\iint_R f_R(x, y)\, dxdy$$

hängt nicht von der Wahl der ausgezeichneten Zerlegung des ebenen Normalbereiches B in ebene Elementarbereiche ab.

(5) *Wir definieren*

$$\iint_B f = \iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy\,.$$

(6) *Das in* (5) *erklärte Integral der Funktion* $f : B \to \mathbb{R}$ *hängt nur von der stetigen Funktion* f *und dem ebenen Normalbereich* B *ab.*

(7) *Sei* $\{B_1, \dots B_n\}$ *mit* $n \in \mathbb{N}$ *eine ausgezeichnete Zerlegung von* B. *Dann gilt*

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{B_k} f_k(x,y)\,dxdy\,.$$

Dabei setzen wir $f_k = f \mid B_k$ *für alle* $k = 1, \dots, n$. *Nach den Sätzen* 20.16 *und* 20.17 *lassen sich dies Integrale der Einschränkungen* f_k *als iterierte Integrale berechnen.*

Definition 20.15. *Wir definieren den Flächeninhalt* $\mathcal{A}(B)$ *eines beliebigen ebenen Normalbereiches* $B \subseteq \mathbb{R}^2$ *durch*

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B dxdy = \iint_B f(x,y)\,dxdy\,.$$

Dabei ist $f : B \to \mathbb{R}$ *die konstante Funktion* $(x,y) \mapsto 1$. *Der Fächeninhalt* $\mathcal{A}(B)$ *hängt nicht von der gewählten ausgezeichneten Zerlegung in ebene Elementarbereiche ab.*

Der Satz von Fubini lässt sich auf ebene Bereiche dritter Art übertragen. Zunächst schreiben wir die Doppelintegrale über ebene Bereiche erster und zweiter Art als iterierte Integrale.

Satz 20.16. *Seien* a, $b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \le b$ *gegeben. Seien* φ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen mit* $\varphi(x) \le \psi(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$. *Sei* $B \subseteq \mathbb{R}^2$ *der ebene Bereich erster Art mit*

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) \le y \le \psi(x)\,,\ a \le x \le b\}\,.$$

Sei schließlich $f : B \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen* (1), (2) *und* (3).

(1) *Die Funktion* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

ist stetig und damit integrierbar.

(2) *Es gilt*

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx\,.$$

Wir sagen daher, dass sich das Doppelintegral als iteriertes Integral *schreiben lässt.*

(3) *Wenn f die konstante Funktion mit $f(x,y)=1$ für alle $(x,y)\in B$ ist, dann gilt*

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B dxdy = \iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b (\psi(x)-\varphi(x))\,dx\,.$$

Ein analoger Satz gilt für ebene Bereiche zweiter Art.

Satz 20.17. *Seien a, $b\in\mathbb{R}$ mit $a\le b$ gegeben. Seien φ, $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi(y)\le\psi(y)$ für alle $y\in[a,b]$. Sei $B\subseteq\mathbb{R}^2$ der ebene Bereich zweiter Art mit*

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \varphi(y)\le x\le\psi(y)\,,\ a\le y\le b\}\,.$$

Sei schließlich $f:B\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen (1), (2) *und* (3).

(1) *Die Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit*

$$F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

ist stetig und damit integrierbar.

(2) *Es gilt*

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b F(y)\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right) dy\,.$$

Wir sagen daher, dass sich das Doppelintegral als iteriertes Integral *schreiben lässt.*

(3) *Wenn f die konstante Funktion mit $f(x,y)=1$ für alle $(x,y)\in B$ ist, dann gilt*

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B dxdy = \iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b (\psi(y)-\varphi(y))\,dy\,.$$

Satz 20.18 (Satz von Fubini für ebene Bereiche dritter Art)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebener Bereich dritter Art. Dann besitzt B Darstellungen der Form*

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \le y \le \psi_1(x)\,,\ a_1 \le x \le b_1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_2(y) \le x \le \psi_2(y)\,,\ a_2 \le y \le b_2\} \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $\varphi_i,\ \psi_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$, die die entsprechenden Bedingungen aus Definition 20.11 *erfüllen. Das Doppelintegral einer stetigen Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ lässt sich dementsprechend auf zwei Weisen als ein iteriertes Integral schrieben:*

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y)\, dxdy &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{\varphi_2(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy\,. \end{aligned}$$

Wir sagen in dieser Situation, dass die beiden iterierten Integrale durch Vertauschung der Integrationreihenfolge *auseinander hervorgegangen sind.*

Unter Umständen vereinfacht eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge die Rechnung ganz erheblich. Bei Anwendung dieser Methode ist darauf zu achten, dass die Integrationsgrenzen entsprechend der Darstellung von B geändert werden müssen.

Beispiel 20.19. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der ebene Bereich dritter Art mit

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x^2\,,\ 0 \le x \le 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\,,\ \sqrt{y} \le x \le 1\}\,. \end{aligned}$$

Sei $f : B \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x, y) = xy$.

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} xy^2\right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^5\, dx = \left[\tfrac{1}{12} x^6\right]_0^1 = \tfrac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 xy\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 (\tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} y^2)\, dy = \left[\tfrac{1}{4} y^2 - \tfrac{1}{6} y^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

□

Definition 20.20. *Der Flächeninhalt $\mathcal{A}(B)$ eines ebenen Elementarbereiches $B \subseteq \mathbb{R}^2$ wird durch*

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B dxdy$$

definiert. Für einen ebenen Bereich erster Art erhalten wir nach Satz 20.16 *die frühere Definition* 19.1 *zurück.*

Beispiel 20.21. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der ebene Elementarbereich aus Beispiel 20.19.

$$\mathcal{A}(B) = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\tfrac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \tfrac{1}{3} \, .$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt

$$\mathcal{A}(B) = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 dx \right) dy = \int_0^1 (1 - \sqrt{y}) \, dy = \left[y - \tfrac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{1}{3} \, .$$

□

Abschließend übertragen wir die fundamentale Ungleichungen auf den Fall ebener Normalbereiche.

Satz 20.22 (Fundamentale Ungleichungen)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebener Normalbereich und $f : B \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *f ist beschränkt. Folglich existiert*

$$\|f\|_\infty = \sup_{(x,y) \in B} |f(x, y)|$$

in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

(2) *Es gelten die* fundamentalen Ungleichungen

$$\left| \iint_B f(x, y) \, dxdy \right| \le \iint_B |f(x, y)| \, dxdy \le \mathcal{A}(B) \cdot \|f\|_\infty \, .$$

21 Integralsatz von Gauß-Green in der Ebene

In diesem Abschnitt übertragen wir den Hauptsatz 17.18 der Differential- und Integralrechnung auf stetig differenzierbare Funktionen in zwei Variablen. Die Formel

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

nehmen wir zum Vorbild und berechnen die Doppelintegrale

$$\iint_B \partial_1 f(x,y)\,dxdy\,, \quad \iint_B \partial_2 f(x,y)\,dxdy$$

mit Hilfe der Funktionswerte von f auf dem Rand eines ebenen Normalbereiches B. Die Auswertung der Randdaten erfolgt durch ein Einfachintegral. Dazu muss der Rand durch einen *orientierten* Weg *parametrisiert* werden.

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ sei mit dem euklidischen inneren Produkt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$, der euklidischen Norm $\|\,.\,\|$ und der Standard-Orientierung versehen. Eine Basis $\{v,w\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\,, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

ist nach Definition *positiv orientiert*, wenn

$$\det(v,w) = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_2 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} > 0$$

gilt. Die kanonische Basis $\{e_1,e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist positiv orientiert.

Satz 21.1 (Integralsatz von Gauß-Green in der Ebene. Elementare Version)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebener Normalbereich, der die folgenden Voraussetzungen* (1)*,* (2)*,* (3) *erfüllt.*

(1) *Der Rand* $\mathrm{Rd}(B)$ *von B sei das Bild $\gamma([a,b])$ eines einfach geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren ebenen Weges*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2\,, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}\,,$$

wobei a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(2) *Es gibt eine ausgezeichnete Zerlegung*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

für γ_1 und γ_2 von $[a,b]$ mit

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

für alle $t \in J = [a,b] \setminus \{t_0,\ldots,t_n\}$.

(3) *Für alle $t \in J$ existiere ein $\epsilon_t \in \mathbb{R}_+$ mit*

$$\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix} \notin B\,. \tag{*}$$

für alle $\delta \in (0, \epsilon_t)$.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge mit $B \subseteq U$. Dann gilt für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f_1,\ f_2 : U \to \mathbb{R}$ die Integralformel

$$\iint_B (\partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y))\,dxdy = \int_a^b \det\begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma_1'(t)\\ f_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma_2'(t)\end{pmatrix} dt\,.$$

Das Integral rechter Hand heißt Normalintegral. *Die obige Integralformel heißt* Integralformel von Gauß-Green. *Für eine alternative Formulierung siehe Aussage* (9) *in* 21.2.

Wir betrachten die Integrale in der Integralformel von Gauß-Green. Das Doppelintegral über den ebenen Normalbereich B existiert, weil die Funktionen f_1 und f_2 stetig differenzierbar sind. Das Normalintegral rechter Hand existiert, weil die Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) = \det\begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma_1'(t)\\ f_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma_2'(t)\end{pmatrix}$$

auf $[a,b]$ im Sinne von Definition 19.8 integrierbar ist. Die Einschränkungen $\varphi \mid (t_{k-1}, t_k)$ besitzen nämlich stetige Fortsetzungen auf $[t_{k-1}, t_k]$.

Wir erörtern die geometrische Bedeutung der Voraussetzungen des Integralsatzes 21.1.

Satz und Definition 21.2 (Regulärer Rand, äußerer Normaleneinheitsvektor, Orientierbarkeit des Randes)**.** *Wir beziehen uns auf die Voraussetzungen und die Bezeichnungen des Integralsatzes* 21.1.

(1) *Wir nennen die Teilmenge*

$$\mathrm{Rd}_\gamma(B) = \gamma(J) \subseteq \mathrm{Rd}(B)$$

den regulären Rand *von B bezüglich der* Parametrisierung γ.

(2) *Nach Voraussetzung* (2) *von* 21.1 *gehören höchstens endlich viele Randpunkte von B nicht zum regulären Rand* $\mathrm{Rd}_\gamma(B)$.

(3) *Die Bedingung* (*) *in Voraussetzung* (3) *von* 21.1 *ist nur für hinreichend kleine positive δ zu erfüllen. Außerdem ist auf das negative Vorzeichen in der zweiten Komponente zu achten. Siehe* (4), (5), (6).

(4) *Das* äußere Normaleneinheitsfeld $n : \mathrm{Rd}_\gamma(B) \to \mathbb{R}^2$ *mit*

$$n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} n_1(\gamma(t))\\ n_2(\gamma(t))\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \gamma_2'(t))^2}} \begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}$$

ist stetig. Für alle $t \in J$ gilt $\|n(\gamma(t))\| = 1$. Wir sagen in dieser Situation, dass der Rand $\mathrm{Rd}(B)$ orientierbar *ist. Siehe* (7).

(5) *Die Vektoren* $n(\gamma(t))$ *und* $-n(\gamma(t))$ *sind der* äußere *respektive* $-n(\gamma(t))$ *der* innere Normaleneinheitsvektor *von* B *im Randpunkt* $\gamma(t)$ *mit* $t \in J$.

(6) *Die Vektoren* $n(\gamma(t))$ *und* $\gamma'(t)$ *sind orthogonal. Weiter gilt*

$$\det(n(\gamma(t)), \gamma'(t)) = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \gamma_2'(t))^2} = \|\gamma'(t)\| > 0 .$$

Daher bilden die Vektoren $n(\gamma(t))$ *und* $\gamma'(t)$ *für jedes* $t \in J$ *eine positiv orientierte Orthogonalbasis der Ebene* $\mathbb{R}^2$.

(7) *Das Innere von* B *liegt* links *des Weges* γ. *Das Äußere von* B *liegt* rechts *des Weges* γ. *Wir sagen dann, dass* γ *und die Teilwege* $\gamma \mid [t_k, t_{k+1}]$ *die* Standardorientierung des Randes von B repräsentieren. *Diese Redeweise halten wir bei, wenn die Teilwege durch äquivalente Wege ersetzt werden.*

(8) *Sei* $f : U \to \mathbb{R}^2$ *die Abbildung mit*

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} .$$

Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_1'(t) \\ f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \langle f(\gamma(t)), n(\gamma(t)) \rangle \cdot \|\gamma'(t)\|$$

für alle $t \in J$.

(9) *Sei* $g \colon U \to \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\iint_B \partial_i g(x, y)\, dxdy = \int_a^b g(\gamma(t))\, n_i(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

für $i = 1, 2$. *Dabei sind* $n_1,\ n_2 \colon \mathrm{Rd}_\gamma(B) \to \mathbb{R}$ *die beiden Kompoenten-funktionen des äußeren Normalenfeldes* n. *Siehe* (4).

Leibniz-Schreibweise 21.3. *Die Formeln der Aussage* (9) *in* 21.2 *lauten in der Leibniz-Schreibweise*

$$\iint_B \frac{\partial g}{\partial x}\, dxdy = + \int_a^b g(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt = + \int_\gamma g(x, y)\, dy ,$$

$$\iint_B \frac{\partial g}{\partial y}\, dxdy = - \int_a^b g(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt = - \int_\gamma g(x, y)\, dx .$$

Auf das negative Vorzeichen in der zweiten Formel ist zu achten. Siehe Abschnitt (4) *in* 21.2. *Der berandende Weg ist so zu orientieren, dass der berandete Normalbereich links liegt. Das richtige Vorzeichen ist in der Determinante im Normalintegral enthalten.*

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir Integralsatz 21.1.

Beweis. Es genügt, den Integralsatz für Dreiecksbereiche zu beweisen. Diese Bereiche besitzen zwei achsenparallele Seiten und eine stetig diffenzierbare Seite. Der allgemeine Fall wird durch Zerlegung in endlich viele Dreiecksbereiche bewiesen. Dabei haben zwei Dreiecksbereiche höchstens Randpunkte gemeinsam.

Erster Schritt. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebener Normalbereich, der die Voraussetzungen (1), (2), (3) erfüllt. Sei $\alpha > 0$. Sei $r : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton fallende Funktion mit $r(\alpha) = 0$, die auf dem halboffenen Intervall $(0, \alpha]$ stetig differenzierbar ist. Dabei gelte $r'(x) < 0$ für alle $x \in (0, \alpha]$. Außerdem gelte

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq r(x)\,,\ 0 \leq x \leq \alpha\}\,.$$

Dann ist $\beta = r(0) > 0$. Die Umkehrfunktion $s : [0, \beta] \to [0, \alpha]$ von r ist streng monoton fallend und auf $[0, \beta)$ stetig differenzierbar. Es gelten

$$s(0) = \alpha\,, \quad s(\beta) = 0\,.$$

Außerdem nehmen wir an, dass wenigstens eine der beiden Bedingungen (i) oder (ii) erfüllt ist.

(i) r' kann auf $[0, \alpha]$ stetig fortgesetzt werden. (Dann liefert $x \mapsto (x, r(x))$ einen stetig differenzierbaren Weg von $(0, \beta)$ nach $(\alpha, 0)$, der zu dem entsprechenden Teilstück von γ entgegengesetzt orientiert ist. Dabei kann $r'(0) = 0$ auftreten.)

(ii) s' kann auf $[0, \beta]$ stetig fortgesetzt werden. (Dann liefert $y \mapsto (s(y), y)$ einen stetig differenzierbaren Weg von $(\alpha, 0)$ nach $(0, \beta)$, der ebenso wie das entsprechende Teilstück von γ orientiert ist. Dabei kann $s'(\beta) = 0$ auftreten.)

Damit ist die Beschreibung des Dreiecksbereiches B abgeschlossen.

Den Übergang zu einer geeigneten Parametrisierung des zweiten Randstückes bewerkstelligen wir mit Hilfe der Substitutionsregel. Dazu müssen wir den Punkt $(0, \beta)$ vorübergehend umgehen. Wenigstens eine der Ableitungen r' oder s' muss bei Annäherung an den Punkt $(0, \beta)$ stetig ergänzbar sein. Siehe Satz 17.31.

Sei $0 < \epsilon < \alpha$ beliebig gewählt. Wir ersetzen den Punkt $(0, \beta)$ durch den Punkt $(\epsilon, r(\epsilon))$ und betrachten das Dreiecksgebiet

$$B_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq r(x)\,,\ \epsilon \leq x \leq \alpha\}\,.$$

Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert den Übergang $B_\epsilon \to B$.

(iii) Zuerst berechnen wir das Flächenintegral der Funktion $\partial_1 f_1$ über B_ϵ und B. In den Bezeichnungen von 20.1 gilt $n = 3$. Weil die erste Seite auf der x-Achse verläuft, gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\; dt = 0\,.$$

Mit der Substitutionsregel erhalten wir

$$\iint_{B_\epsilon} \partial_1 f_1(x, y)\; dxdy = \int_\epsilon^\alpha \left(\int_0^{r(x)} \partial_1 f_1(x, y)\; dy \right) dx$$

$$= \int_0^{r(\epsilon)} \left(\int_\epsilon^{s(y)} \partial_1 f_1(x,y)\; dx \right) dy$$

$$= \int_0^{r(\epsilon)} \{\, f_1(s(y),y) - f_1(\epsilon,y)\,\}\; dy$$

$$= -\int_\epsilon^{\alpha} \{\, f_1(x,r(x)) - f_1(\epsilon,r(x))\,\} \cdot r'(x)\; dx$$

Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert unter Beachtung von (i) respektive (ii) die Integralformel

$$\iint_B \partial_1 f_1(x,y)\, dxdy = \int_{t_1}^{t_2} f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\; dt + \int_{t_2}^{t_3} f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\; dt$$

$$= \int_a^b f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\; dt\,.$$

Dabei verwenden wir die vorletzte Zeile, wenn (ii) gilt, und die letzte Zeile, wenn (i) gilt.

(iv) Wir berechnen das Flächenintegral der Funktion $\partial_2 f_2$ über B_ϵ und B. Weil die dritte Seite auf der y-Achse verläuft, gilt

$$\int_{t_2}^{t_3} f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t)\; dt = 0\,.$$

Mit der Substitutionsregel erhalten wir

$$\iint_{B_\epsilon} \partial_2 f_2(x,y)\, dxdy = \int_\epsilon^{\alpha} \left(\int_0^{r(x)} \partial_2 f_2(x,y)\; dy \right) dx$$

$$= \int_\epsilon^{\alpha} \{\, f_2(x,r(x)) - f_2(x,0)\,\}\; dx$$

$$= -\int_0^{r(\epsilon)} \{\, f_2(s(y),y) - f_2(s(y),0)\,\} \cdot s'(x)\; dy$$

Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert unter Beachtung von (i) respektive (ii) die Integralformel

$$\iint_B \partial_2 f_2(x,y)\, dxdy = -\int_{t_1}^{t_2} f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t)\; dt - \int_{t_0}^{t_1} f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t)\; dt$$

$$= -\int_a^b f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t)\; dt\,.$$

Dabei verwenden wir die vorletzte Zeile, wenn (i) gilt, und die letzte Zeile, wenn (ii) gilt.

Zweiter Schritt. Wir modifizieren die Situation des ersten Schrittes. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebener Normalbereich, der die Voraussetzungen (1), (2), (3) erfüllt.

Sei $\alpha > 0$. Sei $r : [0,\alpha] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton fallende Funktion mit $r(\alpha) = 0$, die auf dem halboffenen Intervall $[0,\alpha)$ stetig differenzierbar ist. Dabei gelte $r'(x) < 0$ für alle $x \in [0,\alpha)$. Außerdem gelte

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le r(x)\,,\ 0 \le x \le \alpha\}\,.$$

Dann ist $\beta = r(0) > 0$. Die Umkehrfunktion $s : [0,\beta] \to [0,\alpha]$ von r ist streng monoton fallend und auf $(0,\beta]$ stetig differenzierbar. Es gelten

$$s(0) = \alpha\,, \quad s(\beta) = 0\,.$$

Außerdem nehmen wir an, dass wenigstens eine der beiden Bedingungen (i′) oder (ii′) erfüllt ist.

(i′) r' kann auf $[0,\alpha]$ stetig fortgesetzt werden.

(ii′) s' kann auf $[0,\beta]$ stetig fortgesetzt werden.

Analog zu den Überlegungen des ersten Schrittes ergibt sich die Gültigkeit des Integralsates für die modifizeirte Situation.

Dritter Schritt. Analog zu den ersten beiden Schritten ergibt sich die Gültigkeit des Integralsatzes für ebenen Normalbereiche, die aus den bisher behandelten Dreiecksgebieten durch achsenparallele Verschiebungen und Spiegelungen an den Achsen hervorgehen. Jeder ebene Normalbereich, der auf diese Weise entsteht heißt *normaler Dreiecksbereich*. Jeder ebene Normalbereich, das die Voraussetungen des Satzes 21.1 erfüllt, lässt sich in endlich viele normale Dreiecksbereiche zerlegen. □

Beispiel 21.4. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der ebene Elementarbereich mit

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le x\,,\ 0 \le x \le 1\}$$

Seien $f_1,\, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die stetig differenzierbaren Funktionen mit

$$f_1(x,y) = x^2 y\,, \quad f_2(x,y) = y\,.$$

Zuerst rechnen wir das Doppelintegral mit Hilfe eines iterierten Integrales aus.

$$\begin{aligned}\iint_B (\partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y))\,dxdy &= \iint_B (2xy+1)\,dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (2xy+1)dy\right) dx = \int_0^1 \left[xy^2 + y\right]_{y=x^2}^{y=x}\, dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2 + x^3 - x^5)\,dx = \tfrac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Wir berechnen das Randintegral bezüglich des Weges $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit den beiden stetig differenzierbaren Teilwegen

$$\gamma_I(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}\,, \quad \gamma_I'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}\,, \quad t \in [0,1]$$

und

$$\gamma_{II}(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \end{pmatrix}, \quad \gamma'_{II}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [1,2].$$

Die Teilwege γ_I und γ_{II} repräsentieren die Standardorientierung des Randes des Elementarbereiches B. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma'_1(t) \\ f_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma'_2(t) \end{pmatrix} dt \\
&\quad = \int_0^1 \det \begin{pmatrix} t^4 & 1 \\ t^2 & 2t \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \det \begin{pmatrix} (2-t)^3 & -1 \\ 2-t & -1 \end{pmatrix} dt \\
&\quad = \int_0^1 (2t^5 - t^2)\, dt + \int_1^2 (t^3 - 6t^2 + 11t - 6)\, dt \\
&\quad = \left[\tfrac{1}{3}t^6 - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{4}t^4 - 2t^3 + \tfrac{11}{2}t^2 - 6t\right]_1^2 \\
&\quad = (0-0) + (-2 - (-\tfrac{9}{4})) = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

Werden in der Integralformel von Gauß-Green die Funktionen f_1 und f_2 geeignet gewählt, so ergeben sich die folgenden Formeln für den Flächeninhalt.

Satz 21.5 (Der Flächeninhalt als Randintegral)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebener Elementarbereich, der die Voraussetzungen* (1), (2), (3) *des Integralsatzes* 21.1 *von Gauss erfüllt. Dann gelten die Formeln*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(B) &= \tfrac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \gamma'_1(t) \\ \gamma_2(t) & \gamma'_2(t) \end{pmatrix} dt \\
&= + \int_a^b \gamma_1(t)\, \gamma'_2(t)\, dt \\
&= - \int_a^b \gamma_2(t)\, \gamma'_1(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Dabei ist auf den Vorfaktor $\frac{1}{2}$ in der ersten Formel und auf das negative Vorzeichen in der dritten Formel zu achten.

In der Leibniz-Schreibweise nehmen die Flächenformeln die Gestalt

$$\mathcal{A}(B) = \tfrac{1}{2} \int_\gamma (x\,dy - y\,dx) = \int_\gamma x\,dy = - \int_\gamma y\,dx$$

an.

Beispiel 21.6. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreisabschnitt, der von den stetig differenzierbaren Teilwegen

$$\gamma_I(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad \gamma_I'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

und

$$\gamma_{II}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \gamma_{II}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

berandet wird. Die Teilwege γ_I und γ_{II} repräsentieren die Standardorientierung des Randes des Kreisabschnittes K. Die zweite Formel aus Satz 21.5 liefert

$$\mathcal{A}(K) = \int_0^1 t \cdot (-1)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cdot \cos(t)\, dt = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Diese Formel ist aus der Elementargeometrie bekannt. Die dritte Formel aus Satz 21.5 liefert

$$\mathcal{A}(K) = -\int_0^1 (1-t) \cdot 1\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot (-\sin(t))\, dt = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Im Hinblick auf den Beweis des Integralsatzes 21.1 bemerken wir, das der Kreisabschnitt K in zwei elementare Dreiecksbereiche zerlegt werden kann. □

Beispiel 21.7 (Cartesisches Blatt)**.** Es sei $a > 0$. Sei $C(a) \subseteq \mathbb{R}^2$ der ebene Normalbereich, der von $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \frac{3a}{1+t^3} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \frac{3a}{(1+t^3)^2} \begin{pmatrix} 1-2t^3 \\ 2t-t^4 \end{pmatrix}$$

berandet wird. Jeder Teilweg $\gamma \mid [0,\tau]$ mit $\tau \in \mathbb{R}_+$ repräsentiert die Standardorientierung. Der Rand von $C(a)$ besteht aus den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$p(x,y) = x^3 - 3axy + y^3 = 0\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Die Nullstellenmenge des Polynoms $p(x,y)$ heißt das *cartesische Blatt.* In den Randpunkten des Parameterbereiches gelten

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen den Flächeninhalt $\mathcal{A}(C(a))$ der *Schleife* des cartesischen Blattes. Dazu verwenden wir die erste Formel aus Satz 21.5. Für alle $t \in [0,\infty)$ gilt

$$\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t) = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,.$$

Eine leichte Überlegung zeigt, dass

$$\mathcal{A}(C(a)) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \frac{\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t)}{2}\, dt = \lim_{\tau\to\infty} \left[-\frac{3a^2}{2(1+\tau^3)}\right]_0^\tau = \tfrac{3}{2}\, a^2$$

gilt. Zuerst betrachten wir für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ den nicht-leeren Durchschnitt von $C(a)$ mit der abgeschlossenen Halbebene $x \geq \epsilon$. Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert die behauptete Flächenformel. □

22 Ergänzung: Abzählbare und überabzählbare Mengen

In diesem Abschnitt vertiefen wir die Überlegungen zum Aufbau der reellen Zahlen.

Definition 22.1. *Seien A, B Mengen und $\varphi : A \to B$ eine Abbildung.*

(1) *φ heißt* injektiv *oder* eineindeutig, *wenn für alle $x, y \in A$ aus $\varphi(x) = \varphi(y)$ stets $x = y$ folgt. Wir schreiben dann $A \preccurlyeq_\varphi B$.*

(2) *φ heißt* surjektiv, *wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $\varphi(a) = b$ gibt. Wir sagen dann auch, dass φ eine* Abbildung von A auf B *ist.*

(3) *φ heißt* bijektiv, *wenn φ injektiv und surjektiv ist. Wir schreiben dann $A \sim_\varphi B$ und sagen, dass φ eine* bijektive Abbildung von A auf B *ist.*

(4) *Wir schreiben $A \preccurlyeq B$, wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. In diesem Fall sagen wir, dass A* von kleinerer oder gleicher Mächtigkeit wie B *ist.*

(5) *Wir schreiben $A \sim B$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. In diesem Fall sagen wir, dass A* von gleicher Mächtigkeit wie B *ist. Wir sagen dann auch, dass A und B* gleichmächtig *sind.*

(6) *Wir schreiben $A \prec B$, wenn $A \preccurlyeq B$ gilt und $A \sim B$ nicht gilt. In diesem Fall sagen wir, dass A* von kleinerer Mächtigkeit als B *ist.*

Nach Satz 22.6 drücken Aussagen wie $A \preccurlyeq B$, $A \prec B$, $A \sim B$ einen Größenvergleich zwischen den Mengen A und B aus. Die Kardinalzahlen sind die entsprechenden ausgezeichneten Vergleichsmengen. Die subtile Konstruktion der Kardinalzahlen übergehen wir aus Zeitgründen. Für die endlichen Mengen übernehmen die nicht-negativen ganzen Zahlen die Rolle von Vergleichszahlen.

Beispiele 22.2.

(1) $q_\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $q_\mathbb{N}(n) = n^2$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

(2) $q_\mathbb{Z} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $q_\mathbb{Z}(k) = k^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.

(3) $b_\mathbb{Z} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $b_\mathbb{Z}(k) = |k|$ ist surjektiv aber nicht injektiv.

(4) Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dann ist $t_{n_0} : \mathbb{Z}_{n_0} \to \mathbb{N}$ mit $t_{n_0}(k) = k - n_0 + 1$ streng monoton wachsend und bijektiv. Also gilt $\mathbb{Z}_{n_0} \sim \mathbb{N}$.

(5) Aus (4) folgt insbesondere $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$.

(6) (Galileo Galilei). Die Menge $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ der geraden natürlichen Zahlen ist eine echte Teilmenge der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen. Die Abbildung $g_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ mit $g_{\mathbb{N}}(n) = 2n$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

(i) $\mathbb{N} \supset 2\mathbb{N}$.

(ii) $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$.

Siehe Satz von Dedekind in 22.8.

(7) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit

$$f(k) = \begin{cases} 2k\,, & k \in \mathbb{N}\,, \\ 0\,, & k = 0\,, \\ -2k-1\,, & -k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ist bijektiv. Also gilt $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}_0$.

(8) Aus (5) und (7) folgt $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

(9) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt keine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(10 Die Schränkungsfunktion $h_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ mit

$$h_{\mathbb{R}}(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

ist streng monoton wachsend und bijektiv. Also gilt $\mathbb{R} \sim (-1, 1)$.

(11) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann ist $\nu_{a,b} : (a, b) \to (0, 1)$ mit

$$\nu_{a,b}(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

streng monoton wachsend und bijektiv. Also gilt $(a, b) \sim (0, 1)$.

(12) Aus (10) und (11) folgt $\mathbb{R} \sim (0, 1)$.

(13) Sei A eine Menge. Die Menge

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid (\exists B \subseteq A) : \; X = B\}$$

heißt die *Potenzmenge von A.*

(i) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n < 2^n$.

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn A aus n Elementen besteht, dann besteht $\mathcal{P}(A)$ aus 2^n Elementen.

(iv) Es gibt es keine surjektive Abbildung einer endlichen Menge auf ihre Potenzmenge. Der Satz von Cantor verallgemeinert diese Beobachtung. Siehe Satz 22.3.

(14) Sei A eine Menge und $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Die Funktion $\chi_B : A \to \{0,1\}$ mit

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1\,, & a \in B\,, \\ 0\,, & a \notin B \end{cases}$$

für alle $a \in A$ heißt die *charakteristische Funktion von* B. Sei $\{0,1\}^A$ die Menge aller Abbildungen von A in $\{0,1\}$. Dann ist $\pi_A : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ mit

$$\pi_A(B) = \chi_B$$

eine bijektive Abbildung. Also gilt $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$.

(15) Aus (14) folgt insbesondere $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

□

Satz 22.3 (Georg Cantor)**.** *Seien A eine nicht-leere Menge und $i_A : A \to \mathcal{P}(A)$ die Abbildung mit*

$$i_A(a) = \{a\}$$

für alle $a \in A$. Dann gelten die Aussagen (1) *bis* (6)*.*

(1) *i_A ist injektiv.*

(2) *i_A ist nicht surjektiv.*

(3) *Es gibt keine surjektive Abbildung von A auf $\mathcal{P}(A)$.*

(4) $A \prec \mathcal{P}(A)\,.$

(5) $\mathcal{P}(A) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\,.$

(6) $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})\,.$

Beweis. Für alle x, $y \in A$ sind die Aussagen $\{x\} = \{y\}$ und $x = y$ äquivalent. Damit ist (1) bewiesen. Offenbar folgt (2) aus (3). Wir beweisen (3). Sei $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ eine beliebige Abbildung von A in $\mathcal{P}(A)$. Wir betrachten

$$X = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\} \in \mathcal{P}(A)\,.$$

Angenommen, es gibt $x \in A$ mit $\varphi(x) = X$. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

(1) Sei $x \in X$. Nach Definition der Menge X gilt in diesem Fall $x \notin \varphi(x)$. Aus der Annahme $\varphi(x) = X$ folgt dann $x \notin X$. Dies ist ein Widerspruch.

(2) Sei $x \notin X$. Nach Definition der Menge X gilt in diesem Fall $x \in \varphi(x)$. Aus der Annahme $\varphi(x) = X$ folgt dann $x \in X$. Dies ist ein Widerspruch.

Folglich gibt es kein $x \in X$ mit $\varphi(x) = X$. Damit ist (3) bewiesen. Aussage (4) folgt aus (1) und (3). Aus (4) folgen (5) und (6). $\square$

Satz 22.4. *Seien A, B Mengen und $\varphi : A \to B$ eine Abbildung.*

(1) *Sei φ bijektiv. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbilding $\psi : B \to A$ mit* (i) *und* (ii).

   (i) $(\forall a \in A): \ \psi(\varphi(a)) = a\,.$

   (ii) $(\forall b \in b): \ \varphi(\psi(b)) = b\,.$

   Die Abbildung ψ heißt die Umkehrabbildung *von φ und wird mit φ^{-1} bezeichnet. Es gelten* (iii) *bis* (vi).

   (iii) *φ^{-1} ist bijektiv.*

   (iv) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi\,.$

   (v) $A \sim_{\varphi} B\,.$

   (vi) $B \sim_{\varphi^{-1}} A\,.$

(2) *φ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $\psi : B \to A$ mit* (i) *und* (ii) *aus* (1) *gibt. In diesem Fall sind φ und ψ die Umkehrabbildungen voneinander.*

Beispiele 22.5.

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ heißt eine *Permutation* oder eine *Vertauschung* der Zahlen $1, \ldots, n$. Sei S_n die Menge der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$. Wir notieren ein Element $\pi \in \mathrm{S}_n$ als $(2 \times n)$-Matrix in der Form

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \pi(1) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Permutation $\pi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrabbildung $\pi^{-1} : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ist die Permutation

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi^{-1}(1) & \pi^{-1}(2) & \pi^{-1}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Die Funktion $q : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $q(x) = x^2$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die Wurzelfunktion $w : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $w(x) = \sqrt{x}$.

(3) (Fortsetzung von Beispiel (10) in 22.2). Sei $h_{\mathbb{R}}^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der Schränkungsfunktion $h_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to (-1,1)$. Dann gilt

$$h_{\mathbb{R}}^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

für alle $y \in (-1,1)$.

□

Satz 22.6. *Seien A, B, C beliebige Mengen. Dann gelten* (1) *bis* (7)*.*

(1) $A \sim A$.

(2) $A \sim B$ *genau dann, wenn* $B \sim A$.

(3) *Aus* $A \sim B$ *und* $B \sim C$ *folgt* $A \sim C$.

(4) (Satz von Cantor-Bernstein-Schröder). $A \sim B$ *gilt genau dann, wenn* $A \preccurlyeq B$ *und* $B \preccurlyeq A$ *gelten.*

(5) *Es gilt* $A \preccurlyeq B$ *oder* $B \preccurlyeq A$.

(6) (Trichotomie). *Es gilt* $A \prec B$ *oder* $A \sim B$ *oder* $B \prec A$.

(7) *Es gibt genau dann eine surjektive Abbildung von* A *auf* B*, wenn es eine injektive Abbildung von* B *in* A *gibt.*

Definition 22.7. *Sei* A *eine Menge.*

(1) A *heißt* endlich*, wenn eine der beiden Alternativen* (i) *oder* (ii) *erfüllt ist. Anderfalls heißt* A unendlich.

  (i) $A = \emptyset$.

  (ii) *Es gibt* $n \in \mathbb{N}$ *und eine bijektive Abbildung* $\varphi : \{1,\ldots,n\} \to A$.

  Im Fall (ii) *heißt die bijektive Abbildung* φ *eine* Abzählung von A. *Wir setzen dann* $a_k = \varphi(k)$ *für alle* $k \in \{1,\ldots,n\}$ *und schreiben*

$$A = \{a_1,\ldots,a_n\}.$$

  Eine solche Darstellung heißt eine Abzählung der Menge A. *Dabei sind die* a_k *paarweise verschieden.*

(2) A *heißt* abzählbar unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to A$ *gibt. Wir setzen in diesem Fall* $a_n = \varphi(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und schreiben*

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

  Eine solche Darstellung heißt eine Abzählung der Menge A. *Dabei gilt* $a_n \neq a_m$ *für alle* n, $m \in \mathbb{N}$ *mit* $n \neq m$.

(3) *A heißt* abzählbar*, wenn A entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.*

(4) *A heißt* überabzählbar*, wenn A unendlich ist und keine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A existiert.*

Satz 22.8. *Sei A eine Menge.*

(1) (Satz von Tarski)*. A ist genau dann endlich, wenn zu jedem $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ein $u \in \mathcal{F}$ derart gibt, dass kein $v \in \mathcal{F}$ die echte Inklusion $u \subset v$ erfüllt.*

(2) (Satz von Dedekind)*. A ist genau dann unendlich, wenn es eine echte Teilmenge B von A und eine bijektive Abbildung $\varphi : B \to A$ gibt.*

(3) *A ist genau abzählbar, wenn es eine Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathcal{N} \to A$ gibt. In diesem Fall heißt φ eine* Abzählung von *A. Wenn $\emptyset \neq \mathcal{N}$ gilt, setzen wir $a_k = \varphi(k)$ für alle $k \in \mathcal{N}$ und schreiben*

$$A = \{a_k \mid k \in \mathcal{N}\} .$$

Eine solche Darstellung heißt eine Abzählung der Menge *A. Dabei gilt $a_n \neq a_m$ für alle n, $m \in \mathcal{N}$ mit $n \neq m$.*

Satz 22.9.

(1) *Jede abzählbar unendliche Menge ist unendlich.*

(2) *Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn $\mathbb{N} \preccurlyeq A$ gilt.*

(3) *Eine Menge ist genau dann unendlich, wenn sie eine abzählbar unendliche Teilmenge besitzt.*

(4) *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

(5) *Eine Menge ist genau dann überabzählbar, wenn sie eine überabzählbare Teilmenge besitzt.*

Beweis. Nachweis von (1). Sei A abzählbar unendlich. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Daher gilt $A \neq \emptyset$. Angenommen, A ist endlich. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\psi : A \to \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $\psi \circ \varphi : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, n\}$ injektiv. Dies ist Widerspruch. Siehe (9) in 22.2.

Nachweis von (2). Sei A eine unendliche Menge. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine echte Teilmenge $A_n \subset A$, die aus genau n Elementen besteht. Die Mengen $B_n \subseteq A$ mit

$$B_n = A_{2^n} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_{2^k} \right)$$

sind nicht-leer. Sei nämlich K_n die Anzahl der Elemente von B_n. Dann gilt

$$K_n \geq 2^n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - (2^n - 1) = 1\,.$$

Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ mit

$$\varphi(n) \in B_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Mengen B_n paarweise disjunkt sind, ist φ injektiv. Also gilt $\mathbb{N} \preccurlyeq A$.

Wir setzen umgekehrt $\mathbb{N} \preccurlyeq A$ voraus. Dann gibt es eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Also gilt $A \neq \emptyset$. Angenommen, es gibt $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\psi : A \to \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $\psi \circ \varphi : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, n\}$ injektiv. Dies ist ein Widerspruch. Siehe (9) in 22.2. Also ist A unendlich.

Die Aussagen (2) und (3) sind äquivalent.

Nachweis von (4). Sei A eine abzählbare Menge. Jede endliche Teilmenge von A ist abzählbar. Sei eine $B \subseteq A$ eine unendliche Teilmenge. Sei $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von A. Wir schreiben die Elemente von A in einer Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

und streichen alle a_n, die nicht in der Teilmenge B vorkommen. Die neue Folge, die auf diese Weise entsteht, bricht nicht ab, weil B eine unendliche Menge ist. Nun numerieren wir die neue Folge mit den natürlichen Zahlen in der üblichen Reihenfolge von links nach rechts. Auf diese Weise erhalten wir eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to B$. Dabei gelten

(i) $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B\}$,

(ii) $\varphi(1) = a_{n_1}$,

(iii) $n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}\}$,

(iv) $\varphi(k+1) = a_{n_{k+1}}$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist B abzählbar.

Nachweis von (5). Wegen (4) enthält keine abzählbare Menge eine überabzählbare Teilmenge. Wenn A eine überabzählbare Menge ist, dann ist beispielsweise A selber eine überabzählbare Teilmenge von A. $\square$

Satz 22.10 (Cantor)**.**

(1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}\,.$

(2) *Jede abzählbare Familie aus abzählbaren Mengen besitzt eine abzählbare Vereinigung.*

(3) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

(4) $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar unendlich.*

(5) $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

(6) $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

(7) $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Zum Nachweis von (1) verwenden wir wie Cantor das Diagonalverfahren von Cauchy. Dazu ordnen wir die Paare $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als unendliches Rechtecksschema an.

$$\begin{array}{lllll} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & \\ (3,1) & (3,2) & \dots & & \\ (4,1) & \dots & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Dann durchlaufen wir die nacheinander von oben die Diagonalen, die von den Einträgen der ersten Zeile eingeleitet werden.

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = (1,1)\,, & & \\ \varphi(2) = (1,2)\,, & \varphi(3) = (2,1)\,, & \\ \varphi(4) = (1,3)\,, & \varphi(5) = (2,2)\,, & \varphi(6) = (3,1)\,, \\ \quad\vdots & & \end{array}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Nachweis von (2). Es genügt, eine beliebige abzählbar unendliche Familie

$$\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

von paarweise disjunkten Mengen A_n mit $A_n \sim \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Dabei besteht A_n aus Elementen $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots$. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Wir setzen $a_n = a_{\varphi(n)}$. Dann gilt

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Also gilt (2). Die Aussagen (3) und (4) sind äquivalent. Sie folgen aus (2).

Zum Nachweis von (5) beweisen wir mit dem Diagonalargument von Cantor, dass das Interval $[0,1)$ überabzählbar ist.

Jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ besitzt eine Dezimalentwickung

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{10^m} = 0.x_1 x_2 x_3 \dots$$

mit Ziffern $x_m \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Eine Dezimalentwicklung heißt *normal*, wenn

$$x_m \neq 9$$

für unendliche viele $m \in \mathbb{N}$ gilt. Jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ besitzt genau eine normale Dezimalentwicklung. Umgekehrt liefert jede normale Dezimalentwicklung $0.x_1x_2x_3\dots$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $x \in [0,1)$.

Angenommen, es gibt eine Abzählung

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = [0,1)\,.$$

Dann besitzt jedes a_n eine eindeutig bestimmte normale Dezimalentwicklung

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{10^m} = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots\,.$$

Wir betrachten die reelle Zahl $b = 0, b_1b_2b_3\dots \in [0,1)$ mit den Ziffern

$$b_m = \begin{cases} 1\,, & a_{mm} = 0\,, \\ 0\,, & a_{mm} \neq 0\,. \end{cases}$$

Wegen $b \in [0,1) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gibt es einen Index $k \in \mathbb{N}$ mit $b = a_k$. Nach Konstruktion von b gilt

$$b_k \neq a_{kk}\,.$$

Dies ist ein Widerspruch. Damit ist (5) bewiesen. Aussage (7) folgt aus (5).

Nachweis von (6). Die Aussage $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$ folgt aus dem Satz von Cantor. Siehe Satz 22.3. Der Satz von Cantor-Bernstein-Schröder liefert

$$\mathbb{R} \sim [0,1)\,.$$

Siehe Satz 22.6. Es gilt

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}\,.$$

Siehe Beispiel (15) in 22.2. Zum Nachweis von (6) zeigen wir $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1)$. Dabei verwenden wir den Satz von Cantor-Bernstein-Schröder ein weiteres Mal.

Die Abbildung $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1)$ mit

$$f(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{3^m}$$

ist injektiv. Siehe Beweis von (5). Also gilt $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \preccurlyeq [0,1)$.

Jedes $x \in [0,1)$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{2^m}$$

mit $x_m \in \{0,1\}$, wobei $x_m = 0$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ gilt. Siehe Beweis von (5). Die Abbildung $g : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit

$$(g(x))(m) = x_m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ ist injektiv. Also gilt $[0,1) \preccurlyeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Aus dem Satz von Cantor-Bernstein-Schröder folgt nun $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1)$. Damit ist auch (6) bewiesen. Ausage (6) präzisiert Aussage (5). Aussage (7) folgt aus (6). $\square$

23 Ergänzung: Horner-Schema

Wir betrachten ein Polynom $p(x)$, das in *absteigender Form* geschrieben ist.

$$p(x) = 5x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 45x^3 + 10x^2 - 20x - 40\,.$$

Die Monome von $p(x)$ werden dabei nach absteigendem Grad angeordnet. Wir beginnen mit dem Monom höchsten Grades.

In der absteigenden Form des Polynoms klammern wir nach und nach einen Faktor x aus. Dabei lassen wir den jeweiligen Rest stehen. Auf diese Weise entsteht die *Horner-Form* des Polynoms $p(x)$.

$$\begin{aligned} p(x) &= 5x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 45x^3 + 10x^2 - 20x - 40 \\ &= (5x^5 - 10x^4 + 25x^3 - 45x^2 + 10x - 20)x - 40 \\ &= ((5x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 45x + 10)x - 20)x - 40 \\ &= (((5x^3 - 10x^2 + 25x - 45)x + 10)x - 20)x - 40 \\ &= ((((5x^2 - 10x + 25)x - 45)x + 10)x - 20)x - 40 \\ &= (((((5x - 10)x + 25)x - 45)x + 10)x - 20)x - 40\,. \end{aligned}$$

Die Horner-Form enthält dieselben Koeffizienten in derselben Reihenfolge wie die absteigende Form. Die Horner-Form gestattet eine effiziente Methode der Polynomauswertung. Wir werten das Polynom

$$p(x) = 5x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 45x^3 + 10x^2 - 20x - 40$$

an der Stelle $x = -3$ aus. Dazu verwenden wir die Horner-Form

$$p(x) = (((((5x - 10)x + 25)x - 45)x + 10)x - 20)x - 40\,.$$

Zunächst schreiben wir die einzelnen Rechenschritte ausführlich nieder. Wir beginnen mit der innersten Klammer und verwenden jedes vorher erzielte Resutat.

$$\begin{aligned} &5x - 10 = 5 \cdot (-3) - 10 = -25\,, \\ &(5x - 10)x + 25 = (-25) \cdot (-3) + 25 = 100\,, \\ &((5x - 10)x + 25)x - 45 = 100 \cdot (-3) - 45 = -345\,, \\ &(((5x - 10)x + 25)x - 45)x + 10 = (-345) \cdot (-3) + 10 = 1045\,, \\ &((((5x - 10)x + 25)x - 45)x + 10)x - 20 = 1045 \cdot (-3) - 20 = -3155\,, \\ &(((((5x - 10)x + 25)x - 45)x + 10)x - 20)x - 40 = (-3155) \cdot (-3) - 40 = 9425\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$p(-3) = 9425\,.$$

Diese Rechenschritte fassen wir in dem folgenden *Horner-Schema* zusammen.

	5	−10	25	−45	10	−20	−40
−3	0	−15	75	−300	1035	−3135	9465
	5	−25	100	−345	1045	−3155	9425

Oberhalb der ersten waagerechten Linie und rechts von der ersten linken senkrechten Linie tragen wir die Koeffizienten des Polynoms $p(x)$ ein. Unterhalb des Leitkoeffizienten tragen wir 0 ein. Links von der ersten senkrechten Linie notieren wir die Stelle $x = -3$, an der wir das Polynom $p(x)$ auswerten. Wir beginnen also mit dem folgenden Schema.

	5	−10	25	−45	10	−20	−40
−3	0						

Dann füllen wir die Spalten unterhalb der Koeffizienten des Polynoms aus. Am Ende dieser Spalten tragen wir die Summe der Einträge ein, die oberhalb der zweiten waagerechten Linie stehen. Wir arbeiten diese Spalten von links nach rechts ab. Solange wir nicht die letzte Spalte erreicht haben, multiplizieren den untersten Eintrag einer kompletten Spalte mit $x = -3$ und tragen das Produkt in der folgenden Spalte unterhalb der ersten waagerechten Linie ein.

Wir wollen die letzte Zeile des Horner-Schemas

	5	−10	25	−45	10	−20	−40
−3	0	−15	75	−300	1035	−3135	9465
	5	−25	100	−345	1045	−3155	9425

deuten. Dazu betrachten wir die Horner-Schemata, die zu Polynomen vom Grad $n = 1$, $n = 2$ und $n \geq 3$ gehören.

$$a_1 x + a_0 = (x - b)\, c_0 + r\,.$$

	a_1	a_0
b	0	bc_0
	c_0	r

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - b)(c_1 x + c_0) + r\,.$$

	a_2	a_1	a_0
b	0	bc_1	bc_0
	c_1	c_0	r

$$a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = (x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0) + r\,, \quad n \geq 3\,.$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
b	0	bc_{n-1}	bc_{n-2}	$\ldots$	bc_1	bc_0
	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\ldots$	c_0	r

Satz 23.1. *Seien c_{n-1}, $\ldots$, c_0 die Einträge eines Horner-Schemas, das zu einem Polynom $p(x)$ vom Grad $n \geq 2$ und einer Stelle $x = b$ gehört.*

(1) *Der letzte Eintrag c_0 ganz rechts ist der Wert, den das Polynom an der Stelle $x = b$ annimmt. Es gilt*

$$p(b) = c_0\,.$$

(2) *Die übrigen Einträge c_{n-1}, $\ldots$, c_1 liefern die Koeffizienten des eindeutig bestimmten Polynoms $q(x)$ mit*

$$p(x) - p(b) = (x-b)q(x)\,.$$

Dabei ist $q(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$. Der Leitkoeffizient von $q(x)$ ist der erste Eintrag c_{n-1}, der ganz links steht. Es gilt

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}x^{n-k} = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1\,.$$

(3) *Die Auswertung des Polynoms $q(x)$ an der Stelle $x = b$ ist gleich der ersten Ableitung $p'(b)$ des gegebenen Polynoms $p(x)$ an der Stelle $x = b$. Es gilt*

$$p'(b) = \lim_{x \to b} \frac{p(x) - p(b)}{x - b} = q(b)\,.$$

(4) *Der letzte Eintrag des Horner-Schemas, das zu $q(x)$ und $x = b$ gehört, ist gleich der ersten Ableitung $p'(b)$ von $p(x)$ an der Stelle $x = b$.*

Wir kehren zu unserem Beispiel zurück. Die letzte Zeile des Horner-Schemas

	5	-10	25	-45	10	-20	-40
-3	0	-15	75	-300	1035	-3135	9465
	5	-25	100	-345	1045	-3155	9425

beschreibt die Zerlegung

$$\begin{aligned}&5x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 45x^3 + 10x^2 - 20x - 40\\&\quad = (x+3)(5x^5 - 25x^4 + 100x^3 - 345x^2 + 1045x - 3155) + 9425\,.\end{aligned}$$

Der letzte Eintrag des Horner-Schemas

	5	-25	100	-345	1045	-3155
-3	0	-15	120	-660	3015	-12180
	5	-40	220	-1005	4060	-15335

liefert die erste Ableitung

$$p'(-3) = -15335$$

von $p(x)$ an der Stelle $b = -3$.

Beispiele 23.2.

(1) Das Horner-Schema

	5	-10	25	-45	10	-20	-40
-2		-10	40	-130	350	-720	1480
	5	-20	65	-175	360	-740	1440

liefert $p(-2) = 1440$ und die Zerlegung

$$p(x) = (x+2)(5x^5 - 20x^4 + 65x^3 - 175x^2 + 360x - 740) + 1440\,.$$

(2) Das Horner-Schema

	5	-10	25	-45	10	-20	-40
2		10	0	50	10	40	40
	5	0	25	5	20	20	0

liefert $p(2) = 0$ und die Zerlegung

$$p(x) = (x-2)(5x^5 + 25x^3 + 5x^2 + 20x + 20)\,.$$

(3) Das Horner-Schema

	5	-10	25	-45	10	-20	-40
3		15	15	120	225	705	2055
	5	5	40	75	235	685	2015

liefert $p(3) = 2015$ und die Zerlegung

$$p(x) = (x-3)(5x^5 + 5x^4 + 40x^3 + 75x^2 + 235x + 685) + 2015\,.$$

(4) Aus der Analysis-Klausur vom 19.7.2010.

$$\frac{18x^2 - 6x + 36}{(x+3)(x^2+9)} = \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+9}\,.$$

$$\alpha = \left.\frac{18x^2 - 6x + 36}{x^2+9}\right|_{x=-3} = \frac{216}{18} = 12\,.$$

	18	-6	36
-3		-54	180
	18	-60	216

$$\frac{\beta x + \gamma}{x^2+9} = \frac{18x^2 - 6x + 36}{(x+3)(x^2+9)} - \frac{12}{x+3} = \frac{6x^2 - 6x - 72}{(x+3)(x^2+9)} = \frac{6x-24}{x^2+9}\,.$$

	6	-6	-72
-3		-18	72
	6	-24	0

$$\frac{18x^2 - 6x + 36}{(x+3)(x^2+9)} = \frac{12}{x+3} + \frac{6x-24}{x^2+9}\,.$$

(5) Aus der Analysis-Klausur vom 24.3.2011.

$$\frac{4x^2 - 12x}{(x+2)(x^2+16)} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+16}\,.$$

$$\alpha = \left.\frac{4x^2 - 12x}{x^2+16}\right|_{x=-2} = \frac{16+24}{20} = \frac{40}{20} = 2\,.$$

	4	-12	0
-2		-8	40
	4	-20	40

$$\frac{\beta x+\gamma}{x^2+16} = \frac{4x^2-12x}{(x+2)(x^2+16)} - \frac{2}{x+2} = \frac{2x^2-12x-32}{(x+2)(x^2+16)} = \frac{2x-16}{x^2+16}\,.$$

	2	-12	-32
-2		-4	32
	2	-16	0

$$\frac{4x^2-12x}{(x+2)(x^2+16)} = \frac{2}{x+2} + \frac{2x-16}{x^2+16}\,.$$

□

Beispiel 23.3 (Ergänzung zu 10.13)**.** Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = x^3 - x^2 + 1\,.$$

Das Horner-Schema

	1	-1	0	1
2	0	2	2	4
	1	1	2	5

liefert

$$p(2) = 5\,, \quad p(x) - p(2) = (x-2)\cdot q(x)\,, \quad q(x) = x^2 + x + 2\,.$$

Das Horner-Schema

	1	1	2
2	0	2	6
	1	3	8

liefert

$$p'(2) = q(2) = 8\,.$$

Siehe Satz 23.1. □

24 Übungsblätter vom SoSe 14

- ≪**Königsweg**, der [unbekannte Herkunft, vielleicht nach Überlieferung antiker Autoren, wonach Herrscher berühmte Mathematiker befragten, ob es nicht für sie einen leichten und schnellen Zugang zu den Geheimnissen der Mathematik gebe und zur Antwort erhielten, dass auch Könige nur wie gewöhnliche Sterbliche durch eifriges Lernen hier zum Ziel kommen könnten, es also keinen *Königsweg* gebe]: *idealer Weg zu einem hohen Ziel.*≫ Siehe [26], p. 934. **Duden. Deutsches Universalwörterbuch.**
- Siehe Eintrag **Life from Euclid** in [30]. **Encyclopædia Britannica.**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
25.4.2014, Blatt 1

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

1.K. Berechnen Sie:

1.1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

1.2. 2^{3^4} .

1.3. $\ln(e^{5^2})$.

1.4. $\log_3 6561 - \log_3 177147$.

1.5. $(\log_3 5)(\log_5 3)$.

2.K. Seien $x, y > 0$ reelle Zahlen. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $cx^r y^s$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{Q}$.

2.1. $\frac{\sqrt[3]{x^5 y^4}}{\sqrt[4]{16x^2 y^{-6}}}$.

2.2. $\sqrt[5]{x^3 \sqrt{32 y^5 \sqrt[3]{x}}}$.

3.K. Stellen Sie die beiden folgenden rationalen Funktionen als Quotienten teilerfremder reeller Polynome dar.

3.1. $-\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$.

3.2. $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$.

4.K. Vereinfachen Sie die beiden folgenden Quotienten.

4.1. $\frac{(3x^2y^3 + 16xy^4) - (12x^2y^3 + 40xy^4)}{3x^2y^4 + 8xy^5}$.

4.2. $\frac{(1+3x^2) - (1+3y^2)}{2(y^2+y^4) - 2(x^2+x^4)}$.

5.G. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ mit

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

bijektiv ist. Konstruieren Sie die Umkehrabbildung zu f.

6.K. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = |2 - |1 - x|| - |x|$$

definiert. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist. Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert, den die Funktion f annimmt.

7.K. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, die die strikte Ungleichung

$$\frac{1}{|x - 2|} > \frac{1}{1 + |x - 1|}$$

erfüllen.

8.G. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 < 2^{n-1}$.

9.G. Beweisen Sie die Gültigkeit der Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{n(n+7)}{24(n+3)(n+4)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion. Kürzen Sie im Induktionsschluss einen Faktor $n + 3$ mit Hilfe des Horner-Schemas.

10.K. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$(1 - x)^n < \frac{1}{(1 + nx)}$$

für alle $x \in (0, 1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

11.G. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

11.1. $2 + 2 = 4\,.$

11.2. $(\forall x \in \mathbb{R}) : \; 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0\,.$

11.3. $(\forall x \in \mathbb{R}) : \; (-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x\,.$

11.4. $(\forall x \in \mathbb{R}) : \; x = -(-x)\,.$

11.5. $(-1) \cdot (-1) = 1\,.$

11.6. $-1 < 0 < 1\,.$

11.7. $(\forall x, y \in \mathbb{R}_-) : \; xy \in \mathbb{R}_+\,.$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
2.5.2014, Blatt 2

**Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“**

12.K. Beweisen Sie, dass $3 + 3 = 6$ gilt.

13.K. Betrachten Sie das folgende Rechenschema.

$12 \cdot 17 = ?$
$12 + 7 = 19$
$2 \cdot 7 = 14$
$190 + 14 = 204$
$12 \cdot 17 = 204$

Finden Sie eine einfache Methode, das Produkt xy zweier natürlicher Zahlen x und y mit $11 \leq x, y \leq 19$ ohne Taschenrechner im Kopf zu berechnen. Begründen Sie diese Methode mit den Rechengesetzen für die Addition und die Multiplikation aus Axiom 1.1. Berechnen Sie die Quadrate der neun ganzen Zahlen 11 bis 19.

14.G. Beweisen Sie die Gültigkeit der Produktformel

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

15.K. Beweisen Sie die Gültigkeit der Produktformel

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mittels vollständiger Induktion.

16.K. Beweisen Sie die Gültigkeit der Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^3 = \frac{1}{8} + \frac{(-1)^n}{8}\left(4n^3 + 6n^2 - 1\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.

-Kontrollfragen -

- Was ist ein Körper?
- Wie ist die Positivität von reellen Zahlen definiert?
- Wie ist die Betragsfunktion erklärt?
- Welche Axiome werden bei der Definition der Betragsfunktion verwendet?
- Was ist ein offenes Intervall?
- Was ist die vollständige Induktion?

- Ist 2 im Körper $\mathbb{Q}$ ein Quadrat? Begründung?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Betrags- und der Signumfunktion?
- Was ist Monotonie?
- Gibt es Funktionen, die zugleich monoton wachsend und monoton fallend sind?
- Definieren Sie Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Geben Sie Beispiele.
- Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Injektivität einer linearen Abbildung.
- Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Surjektivität einer linearen Abbildung.
- Besitzt das Intervall $(0, 1]$ ein Minimum?
- Besitzt das Intervall $(0, 1]$ ein Infimum?
- Was ist eine induktive Menge?
- Definieren Sie $\mathbb{N}$.
- Was ist die Aussage des Wohlordnungssatzes für die Menge der natürlichen Zahlen?
- Wie ist $\mathbb{R}$ definiert?
- Gibt es eine reelle Zahl, die größer als alle natürlichen Zahlen ist?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
9.5.2014, Blatt 3

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

17.G. Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig gegeben. Dann gilt $|w| \pm \mathrm{Re}(w) \geq 0$. Die Formeln

$$\zeta = \begin{cases} \pm \dfrac{\sqrt{|w| + \mathrm{Re}(w)} + i\,\sqrt{|w| - \mathrm{Re}(w)}}{\sqrt{2}}\,, & \mathrm{Im}(w) \geq 0\,, \\[2ex] \pm \dfrac{\sqrt{|w| + \mathrm{Re}(w)} - i\,\sqrt{|w| - \mathrm{Re}(w)}}{\sqrt{2}}\,, & \mathrm{Im}(w) < 0 \end{cases}$$

liefern alle Lösungen $\zeta \in \mathbb{C}$ der quadratischen Gleichung $z^2 = w$.

18.K. Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z^2 - (1+2i)z - (3-4i) = 0\,.$$

Verwenden Sie die komplexe Version der *pq*-Formel und die Formeln aus 17.G.

19.K. Werten Sie das Polynom

$$p(x) = 5x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 45x^3 + 10x^2 - 20x - 40$$

an den Stellen $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ aus. Verwenden Sie dazu das Horner-Schema.

20.G. Beweisen Sie die fogenden Einschließungen.

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}):\quad 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\,.$

(2) $(\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2):\quad 2\sqrt{m} - 2 < \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m} - 1\,.$

(3) $1998 < \displaystyle\sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{n}} < 1999\,.$

21.G. Sei A eine Menge. Die Menge

$$\mathcal{P}(A) = \{\, X \mid (\exists B \subseteq A)\colon\ X = B \,\}$$

heißt die *Potenzmenge von A*. Dann gelten:

(1) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n < 2^n$.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn A aus n Elementen besteht, dann besteht $\mathcal{P}(A)$ aus 2^n Elementen.

22.G. Sei A eine nicht-leere Menge. Sei $i_A : A \to \mathcal{P}(A)$ die Abbildung mit

$$i_A(a) = \{a\}$$

für alle $a \in A$. Es gelten:

(1) i_A ist injektiv.

(2) i_A ist nicht surjektiv.

(3) Es gibt keine surjektive Abbildung von A auf $\mathcal{P}(A)$.

23.G. Wir betten die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ vermittels der injektiven Abbildung $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ in die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ein. In $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sind $\mathbb{R}_-$ und $\mathbb{R}_+$ als Elemente enthalten. Die Teilmenge

$$\overline{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}_-\} \cup i_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cup \{\mathbb{R}_+\}$$

von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ heißt die *erweiterte Zahlengerade*. Wir setzen

$$-\infty = \mathbb{R}_- , \quad +\infty = \mathbb{R}_+$$

und identifizieren jede reelle Zahl a mit ihrem Bild $i_{\mathbb{R}}(a)$. Führen Sie auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Ordungsrelation derart ein, dass $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ mit

$$f(a) = \frac{a}{1 + |a|}$$

zu einer Funktion $\overline{f} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ fortgesetzt werden kann, die bijektiv und streng monoton wachsend ist. Kann $\overline{\mathbb{R}}$ zu einem Körper gemacht werden?

- Kontrollfragen -

- Welches Axiom sichert zusammen mit den Körperaxiomen und den Anordnungsaxiomen die Existenz der positiven Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl?
- Wie ist der Körper $\mathbb{C}$ definiert?
- Deuten Sie die komplexen Zahlen geometrisch.
- Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?
- Erläutern Sie die Formel $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.
- Erläutern Sie die Formeln $A \subseteq B$ und $A \subset B$.
- Erläutern Sie die folgenden echten Inklusionen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
16.5.2014, Blatt 4

Übungen zur Vorlesung „Analysis für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik"

24.G. Wir ergänzen die Gauß'sche Zahlenebene $\mathbb{C}$ um einen unendlich fernen Punkt ∞. Die Menge $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *erweiterte Zahlenebene*. Wir setzen

$$a + \infty = \infty + a = \infty\,, \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty\,, \quad \frac{b}{\infty} = 0\,, \quad \frac{b}{0} = \infty$$

für $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es sei

$$\mathbb{S}^2 = \{\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,\}$$

die reelle Einheitssphäre um $(0,0,0)$. Der Punkt $N = (0,0,1)$ heißt *Nordpol*. Sei $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Die Gerade durch den N und P schneidet die *Äquatorebene* $z = 0$ in einem Punkt $(x, y, 0)$. Die bijektive Abbildung $\pi\colon \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x + iy\,, & (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,1)\,, \\ \infty\,, & (x_1, x_2, x_3) = (0,0,1) \end{cases}$$

heißt *stereographische Projektion*. Weil $\mathbb{S}^2$ vermittels π mit $\overline{\mathbb{C}}$ identifiziert werden kann, heißt $\mathbb{S}^2$ *Riemann'sche Zahlenkugel*. Der Punkt ∞ der erweiterten Zahlenebene $\overline{\mathbb{C}}$ ist von den beiden unendlich fernen Punkten $-\infty$ und $+\infty$ der erweiterten Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$ zu unterscheiden. Zeigen Sie, dass

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + \frac{x_2}{1 - x_3}\, i$$

für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ gilt. Berechnen Sie die Umkehrfunktion σ zu π. Bilden Sie die Ursprungsgeraden von $\mathbb{C}$ vermittels σ in die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ab. Welche geometrische Bedeutung besitzen diese Bilder?

25.G. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n+2}} - \frac{n}{\sqrt{n+4}} \right).$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right).$

(3) $\displaystyle \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \geq |a|}} \sqrt{n}\,(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^s}\,, \quad s \in \mathbb{Q}_+\,.$

26.K. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}+1}\,.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}\,.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

27.G. Beweisen Sie die folgenden asymptotischen Gleichheiten.

(1) $$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \quad (n\to\infty)\,.$$

(2) $$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| \sim \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}} \quad (n\to\infty)\,.$$

28.K. Beweisen Sie die folgenden asymptotischen Gleichheiten.

(1) $$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^2} \quad (n\to\infty)\,.$$

(2) $$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \sim 1 \quad (n\to\infty)\,.$$

(3) $$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (n\to\infty)\,.$$

(4) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 \sim \frac{n^4}{4} \quad (n\to\infty)\,.$$

(5) $$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \quad (n\to\infty)\,.$$

- Kontrollfragen -

- Was ist ein Grenzwert?
- Was ändert sich am Konvergenzverhalten einer Folge, wenn die ersten zehn Milliarden Folgeglieder abgeändert werden?
- Was ist eine Teilfolge?
- Was ändert sich am Konvergenzverhalten einer reellen Folge, wenn jedes Folgeglied quadriert wird?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
23.5.2014, Blatt 5

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

29.K. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$en^n e^{-n} < n! < en^{n+1} e^{-n} .$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n e^{-n}} \right)^{\frac{1}{n}} .$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} .$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^3} \right)^{\frac{1}{n}} .$

30.K. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ sei mit dem euklidischen inneren Produkt $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ und der euklidischen Norm $\|\, .\, \|$ versehen. Gegeben sei in der Ebene $\mathbb{R}^2$ eine Strecke der Länge $a > 0$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$. Verwenden Sie den Höhensatz des Euklid.

31.G. Heron-Verfahren. Sei $a > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 > 0$ die induktiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wenn der Startwert x_0 eine positive rationale Zahl ist, dann besteht die approximierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls aus positiven rationalen Zahlen.

32.G. Verwenden Sie das Heron-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{3}$. Berechnen Sie für die Startwerte $x_0 = 1$ und $x_0 = 2$ jeweils $x_1, \ldots, x_5$. Verwenden Sie ein Computeralgebrasystem. Bestimmen Sie die ersten neun Nachkommastellen der Dezimalentwicklung von $x_1, \ldots, x_6$.

33.K. Sei $a > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 > 0$ die induktiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

monoton fallend gegen $\sqrt[3]{a}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Fehlerabschätzung

$$0 \leq x_n - \sqrt[3]{a} \leq \frac{x_n^3 - a}{3(\sqrt[3]{a})^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Berechnen Sie für $a = 2$ und $x_0 = \frac{5}{4}$ die rationalen Approximationen $x_1, \ldots, x_6$. Verwenden Sie ein Computeralgebrasystem. Bestimmen Sie die ersten neun Nachkommastellen der Dezimalentwicklung von $x_1, \ldots, x_6$.

- Kontrollfragen -

- Wie hängen die Begriffe Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz von reelle Folgen zusammen? Geben Sie Beispiele.
- Erläutern Sie die Einschließungsregel.
- Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.
- Erläutern Sie das Konvergenzkriterium von Cauchy.
- Was bedeutet die asymptotische Gleichung zweier Folgen?
- Was ist ein Häufungspunkt einer reellen Folge? Kann es mehrere Häufungspunkte geben? Kann es unendlich viele Häufungspunkte geben?
- Wie wird der Limes Superior einer beschränkten reellen Folge erklärt?
- Wie ist die Euler'sche Zahl e definiert?
- Ist e rational oder irrational?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
30.5.2014, Blatt 6

Übungen zur Vorlesung „Analysis für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

34.G. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n .$$

(1) Zeigen Sie, dass

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \log\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

(2) Folgern Sie, dass der Grenzwert

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log(n)\right) \approx 0.5772156649\ldots$$

existiert. Die reelle Zahl γ heißt *Euler'sche Konstante*.

(3) Beweisen Sie die asymptotische Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \log(n) \quad (n\to\infty) .$$

Also divergiert die harmonische Reihe logarithmisch.

35.K. Für alle $x \in (-\infty, 1)$ gilt

$$1+x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x} .$$

(1) Sei $s > 0$. Folgern Sie, dass

$$s \leq \frac{\exp(sx)-1}{x} \leq \frac{s}{1-sx} .$$

für alle $x \in (0, s^{-1})$ gilt.

(2) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-n^{-1}\right)^s - 1}{\log\left(1-n^{-1}\right)} = s$$

für alle $s > 0$ gilt.

36.G. Berechnen Sie die folgenden Reihensummen.

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^n \quad .$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \quad .$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 - 5n - 6} \quad .$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} \quad .$$

37.K. Berechnen Sie die folgenden Reihensummen.

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n \quad .$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 2}{2^n} \quad .$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 + 12n - 8} \quad .$$

- Kontrollfragen -

- Was ist die Lipschitz-Stetigkeit?
- Was ist eine Reihensumme?
- Was ist der Logarithmus?
- Definieren Sie die Exponentialfunktion.
- Definieren Sie 2^3.
- Definieren Sie $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.
- Definieren Sie $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$.
- Definieren Sie π^e.
- Welche Lehrbücher der Analysis sind in der Vorlesung genannt worden. Warum wohl? (Nachtrag April 2015. Welche Ratschäge sind im Sommersemester 2014 leider missachtet worden?)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
6.6.2014, Blatt 7

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

38.G. Sei $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$\eta(x) = \begin{cases} -x\log(x)\,, & x \in (0,1]\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Dann gelten:

(1) $(\forall x \in [0,1]) :\ 0 \leq \eta(x) \leq 2(\sqrt{x} - x) \leq 2\sqrt{x}\,.$

(2) $(\forall x \in [0,1]) :\ 0 \leq \eta(x) \leq 2(\sqrt{x} - x) \leq 1 - x\,.$

(3) η ist auf keinem Intervall $[0,\beta]$ mit $\beta \in (0,1]$ Lipschitz-stetig.

(4) η ist auf jedem Intervall $[\alpha,1]$ mit $\alpha \in (0,1]$ Lipschitz-stetig.

(5) η ist auf dem Intervall $[0,1]$ stetig.

39.G. (Shannon). Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gegeben.

(1) Die Elemente $(p_1,\ldots,p_n)$ der Menge $\Gamma_n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\Gamma_n = \{(p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq p_1,\ldots,p_n \leq p_1 + \ldots + p_n = 1\}$$

heißen *n-stellige vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilungen.*

(2) Die Funktion $\mathcal{H}_n : \Gamma_n \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{H}_n(p_1,\ldots,p_n) = \eta(p_1) + \ldots + \eta(p_n)$$

heißt die *n-te Entropiefunktion.*

(3) Für $(p_1,\ldots,p_n) \in \Gamma_n$ heißt der Funktionswert

$$\mathcal{H}_n(p_1,\ldots,p_n)$$

die *Entropie* der Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1,\ldots,p_n)$.

(4) Für alle $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n$ gilt

$$\mathcal{H}_n(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} \eta(p_k) \leq \log(n)\,.$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$(p_1, \ldots, p_n) = (\tfrac{1}{n}, \ldots \tfrac{1}{n})$$

gilt.

40.K. Seien A, X Mengen. Beweisen Sie für die Mengen

$$\mathcal{B}(A, X) = \{f\colon A \to X \mid f \text{ bijektiv } \}\,,$$
$$\mathcal{I}(A, X) = \{f\colon A \to X \mid f \text{ injektiv } \}$$

die folgenden Aussagen:

(1) Für $\#(A) = \#(X) = n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\#(\mathcal{B}(A, X)) = n!\,.$$

(2) Für $\#(A) = k \in \mathbb{N}$ und $\#(X) = n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\#(\mathcal{I}(A, X)) = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

41.K. Sei X eine Menge mit $\#(X) = n \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Wieviele Teilmengen $A \subseteq X$ mit $\#(A) = k$ gibt es?

42.K. Beweisen Sie die Gültigkeit der Summenformel

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{4}{(k-2)(k-1)k} = \frac{n^2 - n - 2}{n(n-1)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ mittels vollständiger Induktion. Kürzen Sie im Induktionsschritt einen Faktor $n - 1$. Verwenden Sie dabei das Horner-Schema.

43.K. Berechnen Sie die Reihensumme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 24n - 5}\,.$$

Verwenden Sie die Teleskop-Methode.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen — Sommersemester 2014
Dr. Wolfgang Marten — 20.6.2014, Blatt 8

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik"

44.G (Banach'scher Fixpunktsatz, Kontraktionssatz). Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $q \in (0,1)$ gegeben. Sei ferner $f : [a,b] \to [a,b]$ eine Funktion, die die Bedingung

$$(\forall x, y \in [a,b]) : \quad |f(x) - f(y)| \le q\,|x - y|$$

erfüllt. Wir sagen in dieser Situation, dass f eine *kontrahierende Selbstabbildung* des Intervalles $[a,b]$ ist. Es gelten die folgenden Aussagen:

(1) Die Funktion f ist Lipschitz-stetig.

(2) Die Funktion f besitzt einen einzigen Fixpunkt in $[a,b]$. Es existiert also genau ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

(3) Sei $x \in [a,b]$ ein beliebiger Startpunkt. Dann konvergiert die induktiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_1 = f(x)\,, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

gegen den Fixpunkt ξ.

(4) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad |x_n - \xi| \le q^n\,|b - a|\,.$$

Die Konvergenz der in (3) definierten Folge folgt aus dem Cauchy-Konvergenzkriterium vermittels vollständiger Induktion. Dabei wird die Konvergenz der geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ausgenutzt. Die Fehlerabschätzung (4) erfolgt vermittels vollständiger Induktion.

45.G. Sei $f : [2,4] \to [2,4]$ die Funktion mit

$$f(x) = 2 + \log(x)\,.$$

(1) Zeigen Sie, dass f eine kontrahierende Selbstabbildung mit $q = \frac{1}{2}$ ist.

(2) Die Funktion f ist auf $[2,4]$ streng monoton wachsend.

(3) Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz besitzt f einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\xi \in [2,4]$.

(4) Berechnen Sie für den Startwert $x = 2.0$ die Approximationen x_{21} und x_{22} auf zehn Stellen nach dem Komma.

(5) Schätzen Sie den Fehler $|\xi - x_{22}|$ ab.

(6) Wiederholen Sie (4) und (5) für den Startwert $x = 4.0$.

46.K. Sei $f : [1, 2] \to [1, 2]$ die Funktion mit

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}\,.$$

(1) Zeigen Sie, dass f eine kontrahierende Selbstabbildung mit $q = \frac{1}{4}$ ist.

(2) Die Funktion f ist streng monoton fallend auf $[1, 2]$.

(3) Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz besitzt f einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\xi \in [1, 2]$.

(4) Rechnen Sie nach, dass $\xi = \sqrt{2}$ gilt.

(5) Berechnen Sie für den Startwert $x = 1.0$ die Approximation x_{12} auf neun Stellen nach dem Komma.

(6) Schätzen Sie den Fehler $|\sqrt{2} - x_{12}|$ ab.

47.K. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die polynomiale Funktion $x \mapsto x^2$. Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ-δ-Kriteriums, dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.

48.K. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ-δ-Kriteriums, dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.

- Kontrollfragen -

- Rekapitulieren Sie alle Konvergenzkriterien aus der Vorlesung.
- Was ist Stetigkeit?
- Formulieren Sie das Folgenkriterium der Stetigkeit.
- Erläutern Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.
- Was ist Lipschitz-Stetigkeit?
- Erläutern Sie den Unterschied von Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.
- Erläutern Sie den Banach'schen Fixpunktsatz. Auf welchen Konvergenzkriterien beruht der Beweis dieses Satzes?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen — Sommersemester 2014
Dr. Wolfgang Marten — 27.6.2014, Blatt 9

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

49.K. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ die Funktion mit $f(x) = \cos(x)$.

(1) Zeigen Sie, dass die Funktion f eine kontrahierende Selbstabbildung des Intervalles $[0,1]$ ist. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz besitzt f in $[0,1]$ einen eindeutig bestimmten Fixpunkt ξ. Fertigen Sie eine Skizze an.

(2) Sei $x \in [0,1]$ ein beliebiger Startwert. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_1 = f(x)\,, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

konvergiert gegen den Fixpunkt ξ von f.

(3) Berechnen Sie für den Startwert $x = 1.0$ die ersten zehn Nachkommastellen der Dezimalentwicklung der Approximation x_{60}. Schätzen Sie den Fehler $|\xi - x_{60}|$ ab.

50.G. Das Polynom $p(x) = x^3 + 4x - 1$ besitzt eine einzige reelle Nullstelle ξ. Nach dem Zwischenwertsatz liegt ξ im Intervall $(0,1)$, denn es gilt $p(0) = -1$ und $p(1) = 4$. Berechnen Sie die Nullstelle ξ auf 10 Nachkommastellen. Wenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz an.

51.K. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = x^{-1}$. Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ-δ-Kriteriums, dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}_+$ stetig ist.

52.G. Die gerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x = 0\,, \\ x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$

ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig. Es gelten (1) bis (5).

(1) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ |f(x)| \leq |x|\,.$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R}):\ |f(x)| \leq 1\,.$

(3) $(\forall x \in \mathbb{R},\, 0 < |x| \leq 1):\ \left|\dfrac{\sin(x)}{x} - 1\right| \leq 3x^2\,.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1\,.$

(5) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1\,.$

53.K. Seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die differenzierbaren Funktionen mit

$$f(x) = \sin(\arctan(x))\,, \quad g(x) = \cos(\arctan(x))\,.$$

(1) Zeigen Sie, dass die Identitäten

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x\,, \quad f^2(x) + g^2(x) = 1\,.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

(2) Zeigen Sie, dass die Identitäten

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

54.K. Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^5-4n+3} \frac{21\, n^6\, 2^{5n}}{8^n}\, (x - \tfrac{1}{2})^n\,.$$

(1) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Reihe.

(2) Untersuchen Sie, ob die Reihe in $x_1 = 1$ konvergiert.

(3) Untersuchen Sie, ob die Reihe in $x_2 = \frac{3}{8}$ konvergiert.

- Kontrollfragen -

- Was liefert die Formel von Cauchy-Hadamard?
- Formulieren Sie den Grenzwertsatz von Abel.
- Definieren Sie die Kompaktheit einer Teilmenge der reellen Zahlengerade.
- Wie lautet das Folgenkriterium für die Kompaktheit?
- Existenzsatz von Weierstraß. Geben Sie hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ auf einer nicht-leeren Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ sowohl Minimum als auch Maximum besitzt.
- Erläutern Sie den Unterschied zwischen den Begriffen Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.
- Unter welchen Bedingungen besitzt eine stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige Umkehrfunktion?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen — Sommersemester 2014
Dr. Wolfgang Marten — 4.7.2014, Blatt 10

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik"

55.G. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ x + x^2\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist lediglich im Punkte $x = 0$ differenzierbar. Es gilt $f'(0) = 1$. In allen Punkten $x \neq 0$ ist die Funktion f unstetig.

56.G. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, für die dies sinnvoll ist. Diese $x \in \mathbb{R}$ müssen nicht bestimmt werden.

(1) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\cos(x)}$.

(2) $f(x) = \dfrac{\tan(x) - \cot(x)}{\tan(x) + \cot(x)}$.

(3) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^6 - 1}{x^6 + 1}\right)$.

(4) $f(x) = (\log(x))^x$.

(5) $f(x) = \log(x^{\cos(x)} \cos(x^x))$.

(6) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^{2x} \sin(x)}{x^2}\right)$.

57.K. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $x > 0$ differenzierbar ist. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

für alle $x > 0$. Im Punkt $x = 0$ ist f dagegen nicht differenzierbar. Warum?

58.K. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, für die dies sinnvoll ist. Diese $x \in \mathbb{R}$ müssen nicht bestimmt werden.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 2x - 1}$.

(2) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$.

(3) $f(x) = \log(\log(x^2))$.

(4) $f(x) = \dfrac{1}{4} \log\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$.

(5) $f(x) = \log(\cos(x^x)\sin(x))$.

(6) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)} + (\cos(x))^{\sin(x)}$.

Notieren Sie bei jedem Rechenschritt, welche Differentiationsregel Sie verwendet haben.

59.G. Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge und $a \in A$ ein Häufungspunkt von A. Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ im Punkte a differenzierbare Funktionen mit $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

gilt. Dies ist eine schwache Version der Regeln von Bernoulli-de l'Hospital.

60.K. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log(x)}{x - 1}$.

(4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\log(x)}$.

(5) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

(6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$.

- Kontrollfragen -

- Was sind Häufungspunkt einer reellen Folge?
- Was sind Häufungspunkte einer Teilmenge M der reellen Zahlengerade?
- Formulieren Sie ein Folgenkriterium für die Häufungspunkte von M.
- Erklären Sie, warum Häufungspunkte einer Menge M auch Limespunkte heißen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
11.7.2014, Blatt 11

Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

61.K. Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \cos(x)\exp(x)\,.$$

Berechnen Sie das dritte Taylor-Polynom $T_3 f(x,0)$ von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

62.K. Sei $f : (-1,2) \to \mathbb{R}$ die rationale Funktion mit

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2 - x - 2}\,.$$

(1) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von f. Verwenden Sie dazu die Zuhaltemethode.

(2) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f' und f'' der Funktion f. Verwenden Sie Teil (1).

(3) Berechnen Sie das zweite Taylor-Polynom $T_2 f(x,0)$ von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Verwenden Sie Teil (2).

(4) Berechnen Sie die Taylor-Reihe $Tf(x,0)$ von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Verwenden Sie dazu Teil (1).

(5) Berechnen Sie die Stelle $\xi \in (-1,2)$, an der die streng konkave Funktion f ihr Maximum annimmt.

63.G. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein zulässiges Intervall. Seien a, $b \in I$ mit $a \leq b$ gegeben. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$. Die Differenz

$$[F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

hängt nicht von der Wahl der Stammfunktion ab. Dabei heißt a die *untere* und b die *obere* Grenze. Berechnen Sie $[F(x)]_a^b$ für die folgenden Funktionen f in den angegebenen Grenzen a und b.

(1) $$f(x) = \frac{8x+1}{x^2+x-2}\,, \quad a = 2\,, \quad b = 3\,.$$

(2) $$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+4x+5}\,, \quad a = 0\,, \quad b = 2\,.$$

(3) $$f(x) = \frac{2x^3+12x^2+12x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}\,, \quad a = 0\,, \quad b = 1\,.$$

64.K. Berechnen Sie $[F(x)]_a^b$ für die folgenden Funktionen f in den angegebenen Grenzen a und b, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

(1) $\quad f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-4x+4}\,, \quad a=3\,, \quad b=4\,.$

(2) $\quad f(x) = \dfrac{24}{x^2-6x+45}\,, \quad a=3\,, \quad b=9\,.$

(3) $\quad f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}\,, \quad a=0\,, \quad b=2\,.$

65.G. Seien $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x,y) = 2xy - \tfrac{1}{3}(x+y)^3\,, \quad g(x,y) = (x+y)^2 - 1\,.$$

(1) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(2) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $Hf(\xi)$ in den kritischen Punkten ξ der Funktion f.

(3) Untersuchen Sie den Typ der kritischen Punkte von f.

(4) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$. Verwenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Bestimmen Sie den Typ der lokalen Extrema mit Hilfe der erweiterten Hesse-Determinante.

66.K. Seien $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x,y) = 4xy - 2(x+y)^2 + 22\,, \quad g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 16\,.$$

Wiederholen Sie die Aufgabenstellung von 65.G.

67.G. Newton-Verfahren. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2-x-1)$$

besitzt drei reelle Nullstellen. Die kleinste Nullstelle ξ liegt im offenen Intervall $(-1,0)$ in der Nähe von $x_0 = -\frac{1}{2}$. Die Nullstelle

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

des ersten Taylor-Polynoms $T_1 f(x, x_0)$ von f mit dem Entwicklungspunkt x_0 liegt näher an der gesuchten Nullstelle ξ als der Punkt x_0. Wiederholung dieses Schrittes führt auf die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Im vorliegenden Fall konvergiert die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit dem Startwert $x_0 = -\frac{1}{2}$ gegen die Nullstelle $\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ der Funktion f. Überlegen Sie sich ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von Newton-Folgen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
18.7.2014, Blatt 12

**Übungen zur Vorlesung
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“**

68.G. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = \arctan(x)$.

(1) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

(2) Berechnen Sie die Taylor-Reihe $Tf(x, 0)$.

(3) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ von $Tf(x, 0)$.

(4) Zeigen Sie, dass $Tf(x, 0)$ für $x = 1$ konvergiert und den Funktionswert $\arctan(1)$ darstellt.

69.G. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \log(x)\, dx\,.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{18x^3}{\sqrt{6x^2+3}}\, dx\,.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}\, dx\,.$

(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2-4x+13}{x(x^2-6x+13)}\, dx\,.$

Hinweise. Integrieren Sie in (1) partiell. Substituieren Sie in (2) den Radikanden. Verwenden Sie in (3) die Substitution $u = \tan(\frac{x}{2})$. Nehmen Sie in (4) eine Partialbruchzerlegung des Integranden vor.

70.K. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\, dx\,.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{90x^5+18x^{11}}{\sqrt{x^6+3}}\, dx\,.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+3\cos(x)-\sin(x)}\, dx\,.$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x^2-x+46}{(x+1)(x^2+16)}\, dx\,.$

71.K. Seien $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 - 12x^2 + 4x + 4xy^2 - 4y + 25\,, \\ g(x,y) &= 2x^2 - xy^2 + y - 7\,. \end{aligned}$$

Sei $N_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ die Nullstellenmenge von g. Die Einschränkung $f \mid N_g$ besitzt in $(x_0, y_0) = (2,1) \in N_g$ ein lokales Extremum.

(1) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hesse-Matrix $Hf(x,y)$ von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla g(x,y)$ und die Hesse-Matrix $Hg(x,y)$ von g für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(3) Berechnen Sie $f(x_0, y_0)$. Verwenden Sie das Horner-Schema.

(4) Berechnen Sie für die Einschränkung $f \mid N_g$ den Lagrange-Multiplikator $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ der Extremalstelle $(x_0, y_0) \in N_g$.

(5) Berechnen Sie das Vorzeichen der erweiterten Hesse-Determinante

$$\det(H(f,g)(x_0, y_0, \lambda_0))\,.$$

Entwickeln Sie die Determinante nach der ersten Spalte.

(6) Bestimmen Sie den Typ des lokalen Extremums von $f \mid N_g$ im Punkt $(x_0, y_0) \in N_g$. Verwenden Sie dazu Teil (5).

- Kontrollfragen -

- Ableitungen sind Grenzwerte von Differenzenquotienten. Erläutern Sie die Einzelheiten der Definition. Verwenden Sie dabei die einschlägigen Fachausdrücke.
- Riemann-Integrale sind Grenzwerte von Riemann-Summen. Erläutern Sie die mathematischen Einzelheiten. Deuten Sie die Riemann-Summen geometrisch.
- Welche Aussagen macht der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung?
- Erläutern Sie die Charakterisierung der Riemann-integrierbaren Funktionen, die der Satz von Lebesgue formuliert.

- Klausuren -

- **Analysis** am Montag, den 18.08.2014, 08.30 bis 11.30 Uhr, ZI 24.1, ZI 24.2, SN 19.1, PK 4.3.
- **Lineare Algebra** am Donnerstag, den 11.09.2014, 12.00 bis 15.00 Uhr, ZI 24.2.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
25.7.2014, Blatt 13

Übungen zur Vorlesung „Analysis für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik"

72.G Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{180x^4 + 30x^9}{\sqrt{x^5+8}}\,dx\,.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 - 2\cos(x) - 2\sin(x)}\,dx\,.$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{3x^2 - 4x + 132}{(x-2)(x^2+64)}\,dx\,.$

Substituieren Sie in (1) den Radikanden. Verwenden Sie in (2) die Substitution $u = \tan(\frac{x}{2})$. Nehmen Sie in (3) eine Partialbruchzerlegung des Integranden vor.

73.G. Seien $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x,y) = 12x^2 + x + 2xy + 12y - 2xy^2 + 8\,, \quad g(x,y) = 4x^2 - xy^2 + 4y + 1\,.$$

Sei $N_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ die Nullstellenmenge von g. Die Einschränkung $f \mid N_g$ besitzt in $(x_0,y_0) = (1,-1) \in N_g$ ein lokales Extremum.

(1) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hesse-Matrix $Hf(x,y)$ von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla g(x,y)$ und die Hesse-Matrix $Hg(x,y)$ von g für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(3) Berechnen Sie $f(x_0,y_0)$.

(4) Berechnen Sie für die Einschränkung $f \mid N_g$ den Lagrange-Multiplikator $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ der Extremalstelle $(x_0,y_0) \in N_g$.

(5) Berechnen Sie das Vorzeichen der erweiterten Hesse-Determinante

$$\det(H(f,g)(x_0,y_0,\lambda_0))\,.$$

Entwickeln Sie die Determinante nach der ersten Spalte.

(6) Bestimmen Sie den Typ des lokalen Extremums von $f \mid N_g$ im Punkt $(x_0,y_0) \in N_g$. Verwenden Sie dazu Teil (5).

74.G. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der ebene Elementarbereich mit

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\,,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

Seien $f_1,\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die stetig differenzierbaren Funktionen mit

$$f_1(x, y) = x^2 y\,, \quad f_2(x, y) = y\,.$$

Prüfen Sie für $B,\ f_1,\ f_2$ die Gültigkeit des Integralsatzes von Gauß-Green nach.

75.G. Es sei $a > 0$. Es sei $p_a \in \mathbb{R}[x, y]$ das Polynom mit

$$p_a(x, y) = x^3 - 3axy + y^3\,.$$

(1) Die Nullstellenmenge $N_a \subseteq \mathbb{R}^2$ von p_a heißt *cartesisches Blatt.*

(2) Sei $C(a) \subseteq \mathbb{R}^2$ der ebene Normalbereich, dessen Rand aus den Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$p(x, y) = x^3 - 3axy + y^3 = 0\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0$$

besteht. Skizzieren Sie die Menge $C(a)$ für $a = 1$.

(3) Die Menge $C(a) \subseteq \mathbb{R}^2$ wird von der Kurve $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \frac{3a}{1 + t^3} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}\,, \quad \gamma'(t) = \frac{3a}{(1 + t^3)^2} \begin{pmatrix} 1 - 2t^3 \\ 2t - t^4 \end{pmatrix}$$

berandet. Jeder Teilweg $\gamma \mid [0, \tau]$ mit $\tau \in \mathbb{R}_+$ repräsentiert die Standardorientierung.

(4) In den Randpunkten des Parameterbereiches der Kurve γ gelten

$$\lim_{t \to 0} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

(5) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathcal{A}(C(a))$ der *Schleife* des cartesischen Blattes.

25 Klausuren vom SoSe 14 und WiSe 14/15

- Gegenstand der Klausuren ist der gesamte Stoff der Vorlesung.
- Ein bloßes Abnicken der Korrekturvorlagen ersetzt keinesfalls die gründliche Erarbeitung des Vorlesungsteiles des Skriptes.
- Die Wiedergabe alter Klausuraufgaben bedeutet nicht, dass diese Aufgaben in der alten Form erneut gestellt werden.
- Die zugrunde liegenden **Methoden** müssen in späteren Klausuren ohne expliziten Hinweis selbständig angewendet werden.
- Auf das **Wiederkennen** mathematischer Grundstrukturen kommt es an.

Notenschlüssel	
30 - 32	4.0
33 - 35	3.7
36 - 38	3.3
39 - 41	3.0
42 - 44	2.7
45 - 47	2.3
48 - 50	2.0
51 - 53	1.7
54 - 56	1.3
57 - 60	1.0

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Am Fallersleber Tore 1
38100 Braunschweig
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
18.8.2014, Klausurblatt 1/2

Klausur zum Modul „Analysis für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik"

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos(x)}\,.$$

(1) Bestimmen Sie den Bildbereich von f. $\boxed{1.0}$

(2) Warum ist f auf kompakten Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar? $\boxed{1.0}$

(3) Berechnen Sie mit dem Hauptsatz die Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktion f mit $F(0) = 0$. Substituieren Sie $u = \tan(\frac{x}{2})$ für $x \in (-\pi, \pi)$. $\boxed{5.0}$

(4) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{7\pi} f(x)\,dx\,.$$ $\boxed{1.0}$

(5) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist. Wenden Sie den ersten Mittelwertsatz an. Verwenden Sie die Abschätzung

$$|2\sin(x)| \leq (2+\cos(x))^2\,.$$

(Diese Abschätzung kann ohne Beweis verwendet werden.) $\boxed{3.0}$

(6) Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt ξ besitzt. Konstruieren Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die gegen ξ konvergiert. Warum kann der Startwert $x_0 = \frac{\pi}{4}$ gewählt werden? Berechnen Sie für $x_0 = \frac{\pi}{4}$ die erste Iteration x_1. $\boxed{4.0}$

(7) Berechnen Sie das Taylor-Polynom $T_2 f(x, 0)$ von f. $\boxed{2.0}$

(8) Seien ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $\xi_1 < \xi_2$ die beiden Fixpunkte des Taylor-Polynoms $T_2 f(x, 0)$. Begründen Sie, dass einer der beiden Punkte ξ_1, ξ_2 als Näherung von ξ betrachtet werden kann. $\boxed{2.0}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^4 \frac{5x^2 - 11x + 53}{(x-5)(x^2+16)}\,dx\,.$$ $\boxed{4.0}$

Nehmen Sie zuerst eine reelle Partialbruchzerlegung des Integranden vor.

Aufgabe 3. Sei $x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Produktformel

$$\sin(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Verwenden Sie die Additionstheoreme. $\boxed{5.0}$

(2) Berechnen Sie für $x \neq 0$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{x} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) . \qquad \boxed{1.0}$$

Verwenden Sie dazu einen bekannten Grenzwert aus der Vorlesung.

(3) Sei $x \neq 0$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) . \qquad \boxed{1.0}$$

Verwenden Sie (1) und (2).

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^4 - 8}{x^4 + 8}\right) .$$

(1) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f. $\boxed{4.0}$

(2) Bestimmen Sie Lage und Typ aller Extremalstellen von f. $\boxed{1.0}$

(3) Bestimmen Sie den Bildbereich der Funktion f. $\boxed{1.0}$

(4) Bestimmen Sie die Asymptote an den Graphen von f. $\boxed{1.0}$

(5) Zeigen Sie, dass die Einschränkung der Funktion f auf die offene Menge $(0, \infty)$ eine differenzierbare Umkehrfunktion g besitzt. $\boxed{1.0}$

(6) Berechnen Sie g' an der Stelle $\arctan(\frac{1}{3})$. $\boxed{1.0}$

Aufgabe 5. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x^2) - \exp(-2x^2) + 4x^2}{x^2 \cos(x^2)} . \qquad \boxed{3.0}$$

Verwenden Sie die Regeln von d'Hospital an.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Am Fallersleber Tore 1
38100 Braunschweig
Dr. Wolfgang Marten

Sommersemester 2014
18.8.2014, Klausurblatt 2/2

Klausur zum Modul
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik"

Aufgabe 6. Seien $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x, y) = 20x^2 + x^2y - 4xy - 10xy^2 + 22y + y^2 - 75\,,$$
$$g(x, y) = 4x^2 - 2xy^2 + 4y - 16\,.$$

Sei $N_g \subseteq \mathbb{R}^2$ die Nullstellenmenge von g. Die Einschränkung $f \mid N_g$ besitzt in $(x_0, y_0) = (2, 1) \in N_g$ ein lokales Extremum.

(1) Berechnen Sie den zugehörigen Lagrange-Multiplikator λ_0. $\boxed{3.0}$

(2) Bestimmen Sie mit Hilfe der erweiterten Hesse-Matrix $H(f, g)(x_0, y_0, \lambda_0)$ den Typ des Extrempunktes (x_0, y_0). $\boxed{3.0}$

Aufgabe 7. Gegeben seien der ebene Elementarbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le 1\,,\ \ 0 \le x \le 1\}$$

und die Funktionen $f_1,\, f_2 \colon B \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = 1 + xy\,, \quad f_2(x, y) = x + y\,.$$

(1) Berechnen Sie

$$\int_B (\partial_1 f_1(x, y) + \partial_2 f_2(x, y))\; d(x, y)\,.$$ $\boxed{3.0}$

(2) Machen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß-Green die Probe von (1). Parametrisieren Sie dazu den Rand von B mit einem stückweise stetig differenzierbaren einfach geschlossenen Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_1'(t) \\ f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} dt\,.$$

Dabei sind $\gamma_1,\, \gamma_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ die Komponenten von γ. Achten Sie darauf, dass das Innere von B links vom Weg γ liegt. Überprüfen Sie, dass diese Bedingung erfüllt ist. $\boxed{9.0}$

Aufgabe 1. Maximal 19 Punkte.

(1)

$$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})\,.$$

$$\min(f) = \min(f \mid [0,2\pi]) = \frac{1}{2+1} = \tfrac{1}{3}\,,$$

$$\max(f) = \max(f \mid [0,2\pi]) = \frac{1}{2-1} = 1\,.$$

$$f \in C(\mathbb{R})\,, \quad \text{ZWS}\,.$$

$$f(\mathbb{R}) = [\,\min(f), \max(f)\,] = [\tfrac{1}{3}, 1]\,.$$ $\boxed{1.0}$

(2)

$$f \in C(\mathbb{R})\,, \quad f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in C(I)\,, \quad f \in C(I) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\,.$$ $\boxed{1.0}$

(3)

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\,, \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,, \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}\,, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du\,.$$

$$\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = \int \frac{2\,du}{2(1+u^2)+(1-u^2)}$$ $\boxed{1.0}$

$$= 2\int \frac{du}{u^2+3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$ $\boxed{1.0}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C_2\,.$$ $\boxed{1.0}$

$$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})\,, \quad F \in C^1(\mathbb{R})\,, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dx\,.$$

$$F(-\pi) = \lim_{x\downarrow -\pi} F(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,, \quad F(\pi) = \lim_{x\uparrow \pi} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \quad \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = F(\pi) - F(-\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,, & x = -\pi\,, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,, & x \in (-\pi, \pi)\,, \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,, & x = \pi\,. \end{cases}$$ 1.0

- Sei $x \in 2k\pi + (-\pi, \pi]$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Dann gilt

$$F(x) = F(x - 2k\pi) + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\,,$$ 1.0

weil f die Periode 2π besitzt. Damit ist F in allen Punkten von $\mathbb{R}$ beschrieben.

(4)

$$7\pi = 6\pi + \pi \in 2k\pi + (-\pi, \pi]\,, \quad k = 3\,.$$

$$\int_0^{7\pi} f(x)\,dx = F(\pi) + \frac{6\pi}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{6\pi}{\sqrt{3}} = \frac{7\pi}{\sqrt{3}}\,.$$ 1.0

(5)

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}\,.$$ 1.0

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \quad |f'(x)| = \frac{|\sin(x)|}{(2 + \cos(x))^2} \leq \frac{1}{2}\,.$$ 1.0

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ : \quad |f(x) - f(y)| \leq \big(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |f'(\xi)|\big) \cdot |x - y| \leq \tfrac{1}{2}\,|x - y|\,.$$ 1.0

(6)

- Nach (5) und (1) ist $f \mid [\frac{1}{3}, 1]$ ist eine kontrahierende Selbstabbildung. Daher besitzt f nach dem Fixpunktsatz von Banach in $[\frac{1}{3}, 1]$ genau einen Fixpunkt ξ. 1.0
- Sei $x \notin [\frac{1}{3}, 1]$ beliebig . Dann gilt $f(x) \in [\frac{1}{3}, 1]$. Wegen (1) gilt $f(x) \neq x$. Also ist ξ der einzige Fixpunkt von f. 1.0

- Nach dem Fixpunktsatz von Banach konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$x_{n+1} = f(x_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

für jeden Startwert $x_0 \in [\frac{1}{3}, 1]$ gegen ξ. Weil $\frac{1}{4}\pi$ in diesem Intervall liegt, ist $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ ein möglicher Startwert. $\boxed{1.0}$

- Für $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ gilt

$$x_1 = f(\tfrac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}\,. \qquad \boxed{1.0}$$

---

(7)

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos(x)}\,,$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}\,,$$

$$f''(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x))^2 + 2\sin^2(x)(2+\cos(x))}{(2+\cos(x))^4}\,.$$

$$f(0) = \frac{1}{3}\,, \quad f'(0) = 0\,, \quad f''(0) = \frac{1\cdot 9 + 2\cdot 0\cdot 3}{81} = \frac{1}{9}\,.$$

$$T_2 f(x,0) = \sum_{k=1}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,(x-0)^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}\,x^2\,. \qquad \boxed{2.0}$$

---

(8)

$$T_2 f(x,0) = x \Leftrightarrow \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{18}\,x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 18x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \pm 5\sqrt{3}\,.$$

$$\xi_1 = 9 - 5\sqrt{3} \in [\tfrac{1}{3}, 1]\,, \quad \xi_2 = 9 + 5\sqrt{3} \notin [\tfrac{1}{3}, 1]\,.$$

- Der Punkt ξ_2 liegt nicht im Bild von f. Daher kommt ξ_2 nicht als Näherung von ξ in Frage. $\boxed{1.0}$
- Der Punkt ξ_1 liegt im Bild von f. Daher kann $\xi_1 = 9 - 5\sqrt{3}$ von $T_2 f(x,0)$ als Näherung für den Fixpunkt ξ von f betrachtet werden. $\boxed{1.0}$

Zusatz für die kleinen Übungen.

$$\tfrac{1}{3} < \xi_1 < \xi < x_1 < \tfrac{1}{4}\,\pi < 1\,.$$

$$\xi_1 \approx 0.339745960\,, \quad \xi \approx 0.3398103575\,, \quad x_1 \approx 0.3693980625\,.$$

Zusatz für die kleinen Übungen.

$$T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad T(x) = \tfrac{1}{2}\big(1 + \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil\big)\,.$$

- Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in [k, k+1]$ gilt

$$\mathrm{T}(x) = \begin{cases} k + \frac{1}{2}\,, & x = k\,, \\ k + 1\,, & x \in (k, k+1)\,, \\ k + \frac{3}{2}\,, & x = k + 1\,. \end{cases}$$

$$\mathrm{Tan}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Tan}(x) = \begin{cases} \tan(x)\,, & \cos(x) \neq 0\,, \\ 0\,, & \cos(x) = 0\,. \end{cases}$$

- Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, T\left(\frac{x - \pi}{2\pi}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, \mathrm{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

  ist eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$.

Aufgabe 2. Maximal 4 Punkte.

$$R(x) = \frac{5x^2 - 11x + 53}{(x-5)(x^2+16)} = \frac{\alpha}{x-5} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+16}\,.$$

$$\alpha = \left.\frac{5x^2 - 11x + 53}{x^2+16}\right|_{x=5} = \frac{123}{41} = 3\,. \qquad \boxed{1.0}$$

	5	−11	53
5		25	70
	5	14	123

$$\begin{aligned} \frac{\beta x + \gamma}{x^2+16} &= \frac{(5x^2 - 11x + 53) - 3(x^2+16)}{(x-5)(x^2+16)} \\ &= \frac{2x^2 - 11x + 5}{(x-5)(x^2+16)} \\ &= \frac{2x-1}{x^2+16}\,. \end{aligned} \qquad \boxed{1.0}$$

	2	−11	5
5		10	−5
	2	−1	0

$$R(x) = \frac{3}{x-5} + \frac{2x}{x^2+16} - \frac{1}{x^2+4^2}\,.$$

$$\int R(x)\,dx = 3\log|x-5| + \log|x^2+16| - \tfrac{1}{4}\arctan(\tfrac{1}{4}\,x) + C\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 R(x)\,dx &= \bigl(0 + 5\log 2 - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\,\pi\bigr) - \bigl(3\log 5 + 4\log 2 - 0\bigr) \\ &= \log 2 - 3\log 5 - \tfrac{1}{16}\,\pi\,. \end{aligned} \qquad \boxed{1.0}$$

Aufgabe 3. Maximal 7 Punkte.

(1)

Induktionsanfang.

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) . \qquad \boxed{1.0}$$

Induktionsschluss.

$$2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$= 2^n \cdot 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \qquad \boxed{1.0}$$

$$= 2^n \cdot \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^{n+1}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \qquad \boxed{1.0}$$

$$= 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \qquad \boxed{1.0}$$

$$= \sin(x) . \qquad \boxed{1.0}$$

(2)

$$x \neq 0 : \qquad y_n = \frac{x}{2^n} \neq 0 , \quad y_n \to 0 .$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{x}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(y_n)}{y_n} = 1 . \qquad \boxed{1.0}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x .$$

(3)

$$x \neq 0 : \qquad \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \to \frac{\sin(x)}{x} , \quad n \to \infty . \qquad \boxed{1.0}$$

Aufgabe 4. Maximal 9 Punkte.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^4-8}{x^4+8}\right) .$$

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^4-8}{x^4+8}\right)^2} \cdot \frac{4x^3(x^4+8)-4x^3(x^4-8)}{(x^4+8)^2}$$
$$= \frac{64x^3}{(x^4+8)^2+(x^4-8)^2}$$
$$= \frac{32x^3}{x^8+64} . \qquad \boxed{2.0}$$

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(x)$.
- f ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend. $\boxed{1.0}$
- f ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. $\boxed{1.0}$

(2)

- f ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend.
- f ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.
- Also besitzt f in $x = 0$ ein globales Minimum. $\boxed{1.0}$

(3)

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) \in f(\mathbb{R}) , \quad \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = \arctan(-1) = -\tfrac{1}{4}\,\pi .$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad : \quad f(x) = f(-x) .$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \notin f(\mathbb{R}) , \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan(1) = \tfrac{1}{4}\,\pi .$$

$$f \in C(\mathbb{R}) , \quad \text{ZWS} .$$

$$f(\mathbb{R}) = [-\tfrac{1}{4}\,\pi, \tfrac{1}{4}\,\pi) . \qquad \boxed{1.0}$$

(4)

- Die Gerade $y = \frac{1}{4}\pi$ ist die Asymptote an den Graphen von f. $\boxed{1.0}$

(5)

- f ist injektiv und differenzierbar auf der offenen Menge $(0, \infty)$.
- $(\forall x \in (0, \infty))\colon f'(x) \neq 0$.
- Also ist g nach Satz 9.3 stetig und nach Satz 12.2 differenzierbar. $\boxed{1.0}$

(6)

$$x > 0 \;:\quad \frac{x^4 - 8}{x^4 + 8} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = 2\,.$$

$$g'(\arctan(\tfrac{1}{3})) = \frac{1}{f'(2)} = \left.\frac{x^8 + 64}{32x^3}\right|_{x=2} = \frac{256 + 64}{256} = \frac{4 \cdot 64 + 64}{4 \cdot 64} = \frac{5}{4}\,. \qquad \boxed{1.0}$$

Aufgabe 5. Maximal 3 Punkte.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{\exp(2x^2) - \exp(-2x^2) + 4x^2}{x^2 \cos(x^2)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{4x\exp(2x^2) + 4x\exp(-2x^2) + 8x}{2x\cos(x^2) - 2x^3\sin(x^2)} && \boxed{1.0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{4\exp(2x^2) + 4\exp(-2x^2) + 8}{2\cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)} && \boxed{1.0} \\
&= \frac{4 + 4 + 8}{2 - 0} \\
&= 8\,. && \boxed{1.0}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Maximal 6 Punkte.

$$f(x,y) = 20x^2 + x^2y - 4xy - 10xy^2 + 22y + y^2 - 75\,,$$
$$g(x,y) = 4x^2 - 2xy^2 + 4y - 16\,.$$

(1)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 40x + 2xy - 4y - 10y^2 \\ x^2 - 4x - 20xy + 22 + 2y \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 2y^2 \\ -4xy + 4 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\begin{pmatrix} 70 \\ -20 \end{pmatrix} = \nabla f(2,1) = \lambda_0 \cdot \nabla g(2,1) = \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = 5\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(2)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 40 + 2y & 2x - 4 - 20y \\ 2x - 4 - 20y & -20x + 2 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1.0}$$

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -4y \\ -4y & -4x \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1.0}$$

$$H(f,g)(x_0,y_0,\lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 & -(\nabla g(x_0,y_0))^t \\ -\nabla g(x_0,y_0) & Hf(x_0,y_0) - \lambda_0 \cdot Hg(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

$$Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 42 & -20 \\ -20 & -38 \end{pmatrix}, \quad Hg(2,1) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$Hf(2,1) - 5 \cdot Hg(2,1) = \begin{pmatrix} 42 & -20 \\ -20 & -38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 & -20 \\ -20 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$H(f,g)(2,1,5) = \begin{pmatrix} 0 & -14 & 4 \\ -14 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(H(f,g)(2,1,5)) = 0 + 14 \cdot (-28) + 4 \cdot (-8) = -(392 + 32) = -424 < 0\,.$$

- Wegen $\det(H(f,g)(2,1,5)) < 0$ besitzt die Einschränkung $f \mid N_g$ in $(2,1) \in N_g$ ein lokales Minimum. $\boxed{1.0}$

Aufgabe 7. Maximal 12 Punkte.

(1)

$$\int_B (\partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y))\, d(x,y)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_x^1 (y+1)\, dy \right) dx \qquad \boxed{1.0}$$

$$= \int_0^1 \left[\, \tfrac{1}{2}y^2 + y \,\right]_x^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x^2 - x \right) dx \qquad \boxed{1.0}$$

$$= \left[\, \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 \,\right]_0^1$$

$$= \tfrac{9}{6} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{3}{6}$$

$$= \tfrac{5}{6}\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(2)

$$\int_B (\partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y))\, d(x,y) \overset{!}{=} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_1'(t) \\ f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} dt\,.$$

- Der Elementarbereich B ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Die drei Seiten sind zu parametrisieren.

$$Z \in \mathcal{Z}(0,3) \;:\quad t_0 = a = 0\,,\quad t_1 = 1\,,\quad t_2 = 2\,,\quad t_3 = b = 3\,.$$

$$\overline{\gamma \mid (t_{k-1}, t_k)}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{k1}(t) \\ \gamma_{k2}(t) \end{pmatrix}\,,\quad t \in [t_{k-1}, t_k]\,,\quad k = 1,2,3\,.$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(t) \\ \gamma_{12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\,,\quad \begin{pmatrix} \gamma_{11}'(t) \\ \gamma_{12}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\quad t \in [0,1]\,.$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{21}(t) \\ \gamma_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \end{pmatrix}\,,\quad \begin{pmatrix} \gamma_{21}'(t) \\ \gamma_{22}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\quad t \in [1,2]\,.$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{31}(t) \\ \gamma_{32}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \end{pmatrix}\,,\quad \begin{pmatrix} \gamma_{31}'(t) \\ \gamma_{32}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,,\quad t \in [2,3]\,.$$

$$\int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_1'(t) \\ f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_{k1}(t), \gamma_{k2}(t)) & \gamma_{k1}'(t) \\ f_2(\gamma_{k1}(t), \gamma_{k2}(t)) & \gamma_{k2}'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \det \begin{pmatrix} 1+t^2 & 1 \\ 2t & 1 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \det \begin{pmatrix} 3-t & -1 \\ 3-t & 0 \end{pmatrix} dt + \int_2^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3-t & -1 \end{pmatrix} dt \qquad \boxed{3.0}$$

$$= \int_0^1 \big(t^2 - 2t + 1\big)\, dt - \int_1^2 \big(t-3\big)\, dt - \int_2^3 dt$$

$$= \Big[\, \tfrac{1}{3}t^3 - t^2 + t \,\Big]_0^1 - \Big[\tfrac{1}{2}t^2 - 3t\Big]_1^2 - \Big[\, t \,\Big]_2^3 \qquad \boxed{3.0}$$

$$= \big(\, \tfrac{1}{3} - 0 \,\big) - \big(\, -4 + \tfrac{5}{2} \,\big) - \big(3-2\big)$$

$$= \tfrac{2}{6} - (-\tfrac{9}{6}) - \tfrac{6}{6}$$

$$= \tfrac{5}{6}\,. \qquad \boxed{1.0}$$

- Das Flächenintegral und das Randintegral haben beide den Wert $\frac{5}{6}$, wie es nach dem Satz von Gauß-Green sein muss. $\boxed{1.0}$

$$n(\gamma(t)) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1) \cup (1,2) \cup (2,3)\,.$$

$$n(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma_{11}'(t))^2 + (\gamma_{12}')(t))^2}} \begin{pmatrix} \gamma_{12}'(t) \\ -\gamma_{11}'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1)\,.$$

$$n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma_{21}'(t))^2 + (\gamma_{22}'(t))^2}} \begin{pmatrix} \gamma_{22}'(t) \\ -\gamma_{21}'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (1,2)\,.$$

$$n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma_{31}'(t))^2 + (\gamma_{32}'(t))^2}} \begin{pmatrix} \gamma_{32}'(t) \\ -\gamma_{31}'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (2,3)\,.$$

- Also liegt das Innere des Elementarbereiches B links von γ. $\boxed{1.0}$

Braunschweig, den 8.8.2014 WM

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Am Fallersleber Tore 1
38100 Braunschweig
Dr. Wolfgang Marten

Wintersemester 2014/2015
23.3.2015, Klausurblatt 1/2

Klausur zum Modul
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x} + \lfloor \sqrt{x} \rfloor \, .$$

Dabei ist $\lfloor\, . \,\rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Floor-Funktion.

(1) Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen und das Bild der Funktion f. $\boxed{2.0}$

(2) Warum ist die Funktion f auf jedem kompakten Teilintervall von $[0,4]$ Riemann-integrierbar? $\boxed{1.0}$

(3) Berechnen Sie die Funktion $F\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi \, .$$ $\boxed{2.0}$

(4) In welchen Punkten $x \in [0,4]$ ist F stetig? $\boxed{1.0}$

(5) In welchen Punkten $x \in [0,4]$ ist F differenzierbar? Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung $F'(x)$. $\boxed{2.0}$

Aufgabe 2. Sei $f : (-2,3) \to \mathbb{R}$ die rationale Funktion mit

$$f(x) = -\frac{6x+102}{x^2-x-6} \, .$$

(1) Berechnen Sie die Taylor-Reihe $Tf(x,x_0)$ von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Führen Sie dazu eine Partialbruchzerlegung von f durch. Verwenden Sie die Summenformel für geometrische Reihen. $\boxed{5.0}$

(2) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Reihe $Tf(x,x_0)$. Verwenden Sie die Formel von Cauchy-Hadamard. $\boxed{2.0}$

(3) Berechnen Sie Lage und Typ der lokalen Extremalstelle $\xi \in (-2,3)$ der Funktion f. $\boxed{2.0}$

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $D_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(kx)\,.$$

(1) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Beweisen Sie die Summenformel

$$D_n(x) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})x\big)}{\sin\big(\frac{1}{2}x\big)}$$

vermittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Im Induktionsschritt ist es günstig, beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner der rechten Seite zu multiplizieren. Beachten Sie das Additionstheorem für den Sinus. $\boxed{4.0}$

(2) Berechnen Sie $D_n(x)$ für alle $x \in 2\pi\mathbb{Z}$. $\boxed{1.0}$

Aufgabe 4. Gegeben Sei die Funktion $f \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x + \log(x)\,.$$

(1) Zeigen Sie, dass f eine einzige Nullstelle $\xi \in (0,\infty)$ besitzt. Beweisen Sie, dass $\xi \in [e^{-1}, 1]$ gilt. $\boxed{2.0}$

(2) Berechnen Sie die zugehörige Newton-Funktion $N \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(3) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 < x}} N(x)\,.$$

Verwenden Sie die Regeln von d'Hospital. $\boxed{2.0}$

(4) Berechnen Sie $N'(x)$ für alle $x \in (0,\infty)$. $\boxed{1.0}$

(5) Beweisen Sie, dass die Einschränkung $N \mid [e^{-1}, 1]$ eine Kontraktion ist. Verwenden Sie dabei, dass $x \mapsto x - x\log(x)$ und $x \mapsto x + \log(x)$ auf $(0,1]$ streng monoton wachsend sind. $\boxed{2.0}$

(6) Begründen Sie, warum die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$x_{n+1} = N(x_n)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und einem Startwert $x_0 \in [e^{-1}, 1]$ gegen die Nullstelle ξ der Funktion f konvergiert. $\boxed{2.0}$

(7) Berechnen Sie x_2 für die Startwert $x_0 = 1$ als Approximation für ξ. $\boxed{1.0}$

Hinweis. Die Aufgaben 5 bis 7 finden Sie auf dem Klausurblatt 2/2.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
Institut *Computational Mathematics*
AG Partielle Differentialgleichungen
Am Fallersleber Tore 1
38100 Braunschweig
Dr. Wolfgang Marten

Wintersemester 2014/2015
23.3.2015, Klausurblatt 2/2

Klausur zum Modul
„Analysis für Studierende
der Informatik und Wirtschaftsinformatik“

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}\pi} \frac{1}{2-\cos(x)+\sin(x)}\, dx\,.$ $\boxed{5.0}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2-2x}{(x+2)(x^2+4)}\, dx\,.$ $\boxed{5.0}$

Verwenden Sie in (1) die Substitution $u = \tan(\frac{x}{2})$. Der Integrand von (1) ist die Einschränkung einer 2π-periodischen stetigen Funktion auf das Intervall $[0, \frac{5}{2}\pi]$. Nehmen Sie in (2) eine Partialbruchzerlegung des Integranden vor.

Aufgabe 6. Seien $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktionen mit

$$f(x,y) = x^3 + 4xy^2 - 14x^2 - 4y^2 + 25x + 2\,,$$
$$g(x,y) = -2xy^2 + 4x^2 + 2y^2 - 8x - 8\,.$$

Sei $N_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ die Nullstellenmenge von g. Die Einschränkung $f \mid N_g$ besitzt in $(x_0,y_0) = (3,1) \in N_g$ ein lokales Extremum.

(1) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hesse-Matrix $Hf(x,y)$ von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\boxed{2.0}$

(2) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla g(x,y)$ und die Hesse-Matrix $Hg(x,y)$ von g für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\boxed{2.0}$

(3) Berechnen Sie für die Einschränkung $f \mid N_g$ den Lagrange-Multiplikator $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ der Extremalstelle $(x_0,y_0) \in N_g$. $\boxed{1.0}$

(4) Bestimmen Sie den Typ des lokalen Extremums von $f \mid N_g$ im Punkt $(x_0,y_0) \in N_g$ mit Hilfe der erweiterten Hesse-Determinante

$$\det(H(f,g)(x_0,y_0,\lambda_0))\,.$$

Entwickeln Sie die Determinante nach der ersten Spalte. $\boxed{1.0}$

Aufgabe 7. Gegeben seien der ebene Elementarbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ \ x^2 \leq y \leq x\}$$

und die Funktionen $f_1,\, f_2 \colon B \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) = xy + \sqrt{y}\,, \quad f_2(x, y) = x + 2y\,.$$

(1) Berechnen Sie

$$\int_B \big(\partial_1 f_1(x, y) + \partial_2 f_2(x, y)\big)\, d(x, y)\,. \qquad \boxed{3.0}$$

(2) Machen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß-Green die Probe von (1). Parametrisieren Sie dazu den Rand von B mit einem stückweise stetig differenzierbaren einfach geschlossenen Weg $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_1'(t) \\ f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} dt\,.$$

Dabei sind $\gamma_1,\, \gamma_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ die Komponenten von γ. Achten Sie darauf, dass das Innere von B links vom Weg γ liegt. $\boxed{8.0}$

Hinweis. Die Aufgaben 1 bis 4 finden Sie auf dem Klausurblatt 1/2.

Aufgabe 1. Maximal 8 Punkte.

$$f\colon [0,4] \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sqrt{x} + \lfloor \sqrt{x} \rfloor\,.$$

(1)

- Für alle $x \in [0,4]$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,, & x \in [0,1)\,, \\ \sqrt{x}+1 & x \in [1,4)\,, \\ 4\,, & x = 4\,. \end{cases}$$

- Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist $\{1,4\}$. $\boxed{1.0}$
- $f([0,4]) = [0,1) \cup [2,3) \cup \{4\}$. $\boxed{1.0}$

(2), (3), (4)

- Weil f monoton wächst, ist f auf jeder kompakten Teilmenge von $[0,4]$ Riemann-integrierbar. $\boxed{1.0}$
- Daher existieren die Integrale, die die Funktion F definieren.
- Nach dem **Hauptsatz** ist F in allen $x \in [0,4]$ stetig. $\boxed{1.0}$
- Für alle $x \in [0,4]$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (\sqrt{\xi} + \lfloor \sqrt{\xi} \rfloor)\, d\xi \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \sqrt{\xi}\, d\xi\,, & x \in [0,1]\,, \\ \displaystyle\int_0^x \sqrt{\xi}\, d\xi + \int_1^x d\xi\,, & x \in [1,4] \end{cases} && \boxed{1.0} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\,, & x \in [0,1]\,, \\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + (x-1)\,, & x \in [1,4]\,. \end{cases} && \boxed{1.0} \end{aligned}$$

(5)

- F ist in allen $x \in [0,1) \cup (1,4]$ differenzierbar. $\boxed{1.0}$
- Für alle $x \in [0,1) \cup (1,4]$ gilt

$$F'(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,, & x \in [0,1)\,, \\ \sqrt{x}+1 & x \in (1,4]\,. \end{cases} \qquad \boxed{1.0}$$

- **Bemerkung.** Es gelten $F'(4) = 3$ und $f(4) = 4$. Auf $[0,1)\cup(1,4)$ stimmen F' und f überein.

Aufgabe 2. Maximal 9 Punkte.

$$f : (-2,3) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = -\frac{6x+102}{x^2-x-6}\,.$$

(1)

$$f(x) = -\frac{6x+102}{x^2-x-6} = -\frac{6x+102}{(x+2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x-3}\,.$$

$$\alpha = -\frac{6x+102}{x-3}\Big|_{x=-2} = -\frac{(-12)+102}{(-5)} = \frac{90}{5} = 18\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\beta = -\frac{6x+102}{x+2}\Big|_{x=3} = -\frac{18+102}{5} = -\frac{120}{5} = -24\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$f(x) = -\frac{6x+102}{x^2-x-6} = \frac{18}{x+2} - \frac{24}{x-3}\,.$$

$$\frac{18}{x+2} = \frac{18}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = 9\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}\,x^k\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$-\frac{24}{x-3} = \frac{24}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 8\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\,x^k\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$Tf(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k\cdot 9}{2^k} + \frac{8}{3^k}\right)x^k\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(2)

$$Tf(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,, \quad a_k = \frac{(-1)^k \cdot 9}{2^k} + \frac{8}{3^k}\,.$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} &= \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k \cdot 9}{2^k} + \frac{8}{3^k} \right|^{\frac{1}{k}} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{9}{2^k} + \frac{8}{3^k} \right|^{\frac{1}{k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{9}{2^k} + \frac{8}{3^k} \right|^{\frac{1}{k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{9}{2^k} \right|^{\frac{1}{k}} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned} \qquad \boxed{1.0}$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}} = 2\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(3)

- Kritischer Punkt von f. Für alle $x \in (-2,3)$ gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{18}{(x+2)^2} + \frac{24}{(x-3)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 34x - 11 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = -17 + 10\sqrt{3}\,.
\end{aligned} \qquad \boxed{1.0}$$

- Typ des kritschen Punktes. Für alle $x \in (-2,3)$ gilt

$$f''(x) = \frac{36}{(x+2)^3} - \frac{48}{(x-3)^3}\,.$$

  Damit folgen

$$\xi - 3 = -20 + 10\sqrt{3} < 0\,, \quad f''(\xi) = f''(-17 + 10\sqrt{3}) > 0\,.$$

  Also besitzt f in $\xi = -17 + 10\sqrt{3}$ ein lokales **Minimum**. $\boxed{1.0}$

Aufgabe 3. Maximal 5 Punkte.

(0) Additionstheoreme.

- Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\,,$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\,\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.$$

(1) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Induktionsanfang.

$$D_0(x) = 1\,, \qquad \frac{\sin\big((0+\frac{1}{2})x\big)}{\sin\big(\frac{1}{2}x\big)} = 1\,. \qquad \boxed{1.0}$$

Induktionsschluss.

$$\begin{aligned}
&\sin\big(\tfrac{1}{2}x\big)D_{n+1}(x)\\
&= \sin\big(\tfrac{1}{2}x\big)\cdot\Big(D_n(x) + \cos\big((n+1)x\big) + \cos\big((-1)(n+1)x\big)\Big)\\
&= \sin\big((n+\tfrac{1}{2})x\big) + \Big\{\sin\big(\tfrac{1}{2}x\big)\cdot\cos\big((n+1)x\big) + \cos\big(\tfrac{1}{2}x\big)\cdot\sin\big((n+1)x\big)\Big\}\\
&\qquad + \Big\{\cos\big(\tfrac{1}{2}x\big)\cdot\sin\big((-1)(n+1)x\big) + \sin\big(\tfrac{1}{2}x\big)\cdot\cos\big((-1)(n+1)x\big)\Big\} \qquad \boxed{1.0}\\
&= \sin\big((n+\tfrac{1}{2})x\big) + \sin\big((n+\tfrac{3}{2})x\big) + \sin\big((-1)(n+\tfrac{1}{2})x\big) \qquad \boxed{1.0}\\
&= \sin\big((n+\tfrac{3}{2})x\big)\,. \qquad \boxed{1.0}
\end{aligned}$$

(2) Sei $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(kx) = (2n+1)\cdot 1 = 2n+1\,. \qquad \boxed{1.0}$$

Aufgabe 4. Maximal 11 Punkte.

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = x + \log(x)\,.$$

(1)

- Für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = 1 + x^{-1} > 0\,.$$

Also ist f injektiv. Also kann f höchstens eine Nullstelle besitzen. $\boxed{1.0}$

- f ist stetig mit

$$f(e^{-1}) = e^{-1} - 1 < 0\,, \quad f(1) = 1 + 0 > 0\,.$$

Nach dem **Zwischenwertsatz** besitzt f im Interval $(e^{-1}, 1)$ eine Nullstelle. Also gilt $\xi \in [e^{-1}, 1]$. $\boxed{1.0}$

(2)

$$N(x) = x - \frac{x + \log(x)}{1 + x^{-1}} = \frac{x - x\log(x)}{x+1}\,, \quad x > 0\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(3)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} \big(x\log(x)\big) = \lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} \frac{\log(x)}{x^{-1}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} \frac{x^{-1}}{x^{-2}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} x = 0\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} N(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} \frac{x}{x+1} - \left(\lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} \frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(\lim_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} \big(x\log(x)\big)\right) = 0 - 1 \cdot 0 = 0\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(4)

$$N'(x) = \frac{(x+1)(1 - \log(x) - 1) - (x - x\log(x))}{(x+1)^2} = -\frac{x + \log(x)}{(x+1)^2}\,, \quad x > 0\,. \qquad \boxed{1.0}$$

(5)

- Die Funktion $x \mapsto x - x\log(x)$ ist auf $(0,1]$ streng monoton wachsend.
- Für alle $x \in (0,1]$ gilt die Einschließung
$$\tfrac{1}{2}\big(x - x\log(x)\big) \le N(x) \le x - x\log(x)\,.$$
- Für alle $x \in [e^{-1},1]$ gilt
$$e^{-1} = \tfrac{1}{2}\big(x - x\log(x)\big)|_{x=e^{-1}} \le N(x) \le \big(x - x\log(x)\big)|_{x=1} = 1\,.$$
Also bildet N das Intervall $[e^{-1},1]$ in sich ab. $\boxed{1.0}$

- $x \mapsto x + \log(x)$ ist auf $(0,1]$ streng monoton wachsend.
- N' ist auf $(0,1]$ streng monoton fallend.
- Für alle $x \in [e^{-1},1]$ gilt
$$-\frac{1}{4} = N'(1) \le N'(x) \le N'(e^{-1}) = \frac{1-e^{-1}}{(e^{-1}+1)^2} < 1 - e^{-1} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$
- Für alle $x \in [e^{-1},1]$ gilt
$$|N'(x)| \le \tfrac{1}{2}\,.$$
- Nach dem **Mittelwertsatz** gilt
$$|N(x) - N(y)| \le \tfrac{1}{2}|x-y|$$
für alle $x, y \in [e^{-1},1]$. Also ist N auf $[e^{-1},1]$ eine Kontraktion. $\boxed{1.0}$

(6)

- Nach dem **Fixpunktsatz von Banach** konvergiert die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jeden Startwert $x_0 \in [e^{-1},1]$ gegen den einzigen Fixpunkt der Kontraktion $N \mid [e^{-1},1]$. $\boxed{1.0}$
- Für alle $x \in (0,\infty)$ gilt
$$N(x) = x \;\Leftrightarrow\; x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0\,.$$
Also konvergiert die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jeden Startwert $x_0 \in [e^{-1},1]$ gegen die einzige Nullstelle ξ von f. $\boxed{1.0}$

(7)

$$x_0 = 1\,,$$

$$x_1 = N(1) = \frac{1 - 1 \cdot 0}{1 + 1} = \tfrac{1}{2}\,,$$

$$x_2 = N(\tfrac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log(\frac{1}{2})}{1 + \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\log(2)\,.$$ $\boxed{1.0}$

Zusatz.

x_0	1.0000000000
x_1	0.5000000000
x_2	0.5643823935
x_3	0.5671389877
x_4	0.5671432904
x_5	0.5671432904
ξ	0.5671432904

Aufgabe 5. Maximal 10 Punkte.

(1)

- Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{1}{2 - \cos(x) + \sin(x)}$$
ist stetig und 2π-periodisch. Nach dem **Hauptsatz** ist f auf jedem kompakten Teilintervall von $\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du\,.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2-\cos(x)+\sin(x)}\,dx &= \int \frac{2}{2(1+u^2)-(1-u^2)+2u}\,du \\
&= \int \frac{2}{3u^2+2u+1}\,du && \boxed{1.0} \\
&= \tfrac{2}{3}\int \frac{1}{u^2+\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}}\,du \\
&= \tfrac{2}{3}\int \frac{1}{(u+\frac{1}{3})^2+(\frac{\sqrt{2}}{3})^2}\,du \\
&= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}(u+\tfrac{1}{3})\right)+C_1 && \boxed{1.0} \\
&= \sqrt{2}\,\arctan\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\tan\left(\tfrac{1}{2}x\right)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)+C\,. && \boxed{1.0}
\end{aligned}$$

- Nach dem **Hauptsatz** gibt es eine Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f mit
$$F(x) = \sqrt{2}\,\arctan\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\tan\left(\tfrac{1}{2}x\right)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
für alle $x \in (-\pi, \pi)$. Die Funktion f ist 2π-periodisch. Die Funktion F ist stetig. Also gilt
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{5}{2}\pi} f(x)\,dx &= \lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} F(x) - \lim_{\substack{x\to-\pi\\ -\pi<x}} F(x) + F(\tfrac{1}{2}\pi) - F(0) && \boxed{1.0} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi - (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi) + \sqrt{2}\,\arctan(2\sqrt{2}) - \sqrt{2}\,\arctan(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) && \boxed{1.0} \\
&= \sqrt{2}\,\pi + \sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\
&= \sqrt{2}\,\pi + \sqrt{2}\,\arctan(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

(2)

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x^2-2x}{(x+2)(x^2+4)}\;dx\,.$$

$$R(x) = \frac{3x^2-2x}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+4}\,.$$

$$\alpha = \frac{3x^2-2x}{x^2+4}\Big|_{x=-2} = \frac{12+4}{4+4} = 2\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-2x}{(x+2)(x^2+4)} - \frac{2}{x+2} &= \frac{(3x^2-2x)-2(x^2+4)}{(x+2)(x^2+4)} \\
&= \frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2+4)} \\
&= \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2+4)} \\
&= \frac{x-4}{x^2+4}\,. \qquad \boxed{1.0}
\end{aligned}$$

	1	−2	−8
−2		−2	8
	1	−4	0

$$R(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{x-4}{x^2+4} = 2\cdot\frac{1}{x+2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4} - 4\cdot\frac{1}{x^2+2^2}\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\int R(x)\,dx = 2\log|x+2| + \tfrac{1}{2}\log|x^2+4| - 2\arctan(\tfrac{1}{2}x) + C\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} R(x)\,dx &= \Big\{2\log(3) + \tfrac{1}{2}\log(5) - 2\arctan(\tfrac{1}{2})\Big\} \\
&\qquad - \Big\{2\log(1) + \tfrac{1}{2}\log(5) + 2\arctan(\tfrac{1}{2})\Big\} \\
&= 2\log(3) - 4\log(\tfrac{1}{2}) \qquad \boxed{1.0} \\
&= 2\log(3) + 4\log(2)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Maximal 6 Punkte.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = x^3 + 4xy^2 - 14x^2 - 4y^2 + 25x + 2\,,$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad g(x,y) = -2xy^2 + 4x^2 + 2y^2 - 8x - 8\,.$$

$$(x_0,y_0) = (3,1) \in N_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}\,.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4y^2 - 28x + 25 \\ 8xy - 8y \end{pmatrix}, \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 28 & 8y \\ 8y & 8x - 8 \end{pmatrix}.$$ $\boxed{2.0}$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 + 8x - 8 \\ -4xy + 4y \end{pmatrix}, \quad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -4y \\ -4y & -4x + 4 \end{pmatrix}.$$ $\boxed{2.0}$

$$\begin{pmatrix} -28 \\ 16 \end{pmatrix} = \nabla f(x_0,y_0) \overset{!}{=} \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0) = \lambda_0 \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = -2\,.$$ $\boxed{1.0}$

$$Hf(x_0,y_0) - \lambda_0 \cdot Hg(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} H(f,g)(x_0,y_0,\lambda_0) &= \begin{pmatrix} 0 & -(\nabla g(x_0,y_0))^t \\ -\nabla g(x_0,y_0) & Hf(x_0,y_0) - \lambda_0 \cdot Hg(x_0,y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -14 & 8 \\ -14 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\det(H(f,g)(x_0,y_0,\lambda_0)) = 0 + 14 \cdot 0 + 8 \cdot (-48) = -384\,.$$

- Wegen $\det(H(f,g)(3,1,-2)) < 0$ besitzt die Einschränkung $f \mid N_g$ in $(3,1) \in N_g$ ein lokales Minimum. $\boxed{1.0}$

Aufgabe 7. Maximal 11 Punkte.

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ \ x^2 \leq y \leq x\}\,.$$

$$f_1, f_2 \colon B \to \mathbb{R}\,, \quad f_1(x,y) = xy + \sqrt{y}\,, \quad f_2(x,y) = x + 2y\,.$$

(1)

- B ist das kompakte Flächenstück zwischen der Normalparabel und der ersten Winkelhalbierenden mit den beiden Eckpunkten $(0,0)$ und $(1,1)$.

$$\begin{aligned}
\int_B (\partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y))\, d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (y+2)\, dy \right) dx && \boxed{1.0} \\
&= \int_0^1 \left[\, \tfrac{1}{2} y^2 + 2y \,\right]_{x^2}^x dx \\
&= \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2} x^4 - \tfrac{3}{2} x^2 + 2x \right) dx && \boxed{1.0} \\
&= \left[\, -\tfrac{1}{10} x^5 - \tfrac{1}{2} x^3 + x^2 \,\right]_0^1 \\
&= -\tfrac{1}{10} - \tfrac{5}{10} + \tfrac{10}{10} \\
&= \tfrac{2}{5}\,. && \boxed{1.0}
\end{aligned}$$

(2)

- Der untere Rand von B ist ein Parabelbogen. Der obere Rand von B ist ein Stück der ersten Winkelhalbierenden.

  Der Rand von B wird durch einen stückweise stetig differenzierbaren einfach geschlossenen Weg γ parametrisiert. Dabei liegt das Innere von B links von γ.

$$\gamma \colon [0,2] \to \mathbb{R}^2\,.$$

$$Z \in \mathcal{Z}(0,2) \ :\quad t_0 = a = 0\,,\quad t_1 = 1\,,\quad b = t_2 = 2\,.$$

$$\overline{\gamma \mid (t_{k-1}, t_k)}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{k1}(t) \\ \gamma_{k2}(t) \end{pmatrix}\,,\quad t \in [t_{k-1}, t_k]\,,\quad k = 1,2\,.$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(t) \\ \gamma_{12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma'_{11}(t) \\ \gamma'_{12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{21}(t) \\ \gamma_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma'_{21}(t) \\ \gamma'_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [1,2]\,. \qquad \boxed{1.0}$$

$$\int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma'_1(t) \\ f_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) & \gamma'_2(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \det \begin{pmatrix} f_1(\gamma_{k1}(t),\gamma_{k2}(t)) & \gamma'_{k1}(t) \\ f_2(\gamma_{k1}(t),\gamma_{k2}(t)) & \gamma'_{k2}(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \det \begin{pmatrix} t^3+t & 1 \\ 2t^2+t & 2t \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \det \begin{pmatrix} (2-t)^2+\sqrt{2-t} & -1 \\ 3(2-t) & -1 \end{pmatrix} dt \qquad \boxed{1.0}$$

$$= \int_0^1 \big(2t^4 - t\big)\, dt + \int_1^2 \big(-t^2 + t - \sqrt{2-t} + 2 \,\big)\, dt \qquad \boxed{1.0}$$

$$= \big[\, \tfrac{2}{5}t^5 - \tfrac{1}{2}t^2 \,\big]_0^1 + \big[-\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{2}{3}(2-t)^{\frac{3}{2}} + 2t \big]_1^2 \qquad \boxed{2.0}$$

$$= \big(\tfrac{4}{10} - \tfrac{5}{10}\big) + \big(\tfrac{20}{6} - \tfrac{17}{6}\big)$$

$$= \tfrac{2}{5}\,. \qquad \boxed{1.0}$$

- Das Flächenintegral und das Randintegral haben beide denselben Wert, wie es nach dem Satz von Gauß-Green sein muss. $\boxed{1.0}$

Braunschweig, den 13.3.2015 WM

Literatur

[1] J. Aczél. *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 25. Birkhäuser Verlag. Basel und Stuttgart. 1961.

[2] J. Aczél, Z. Daróczy. *On Measures of Information and Their Characterizations.* Mathematics in Science and Engineering, Volume 115. Academic Press. New York, San Francisco, London. 1975.

[3] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus.* Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Menlo Park, London, Sydney, Manila. 1957.

[4] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Second Edition. Addison-Wesley, Longman. Reading, Massachuetts. 1974.

[5] Tom M. Apostol. *Calculus 1, 2.* Second Edition. John Wiley and Sons. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapor. 1967, 1969.

[6] Benno Artmann. *Euclid. The Creation of Mathematics.* Springer Science. New York. Corrected second printing, 2001.

[7] William Barker, Roger Howe. Continuous Symmetry. From Euclid to Klein. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 2007.

[8] Martin Barner, Friedrich Flohr. *Analysis 1, 2.* Fünfte, dritte Auflage. Walter de Gruyter. Berlin, New York. 2000, 1996.

[9] Patrick Billingsley. *Ergodic Theory and Information.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons. New York, London, Sidney. 1965.

[10] Christian Blatter. *Analysis 1, 2.* Vierte, dritte Auflage. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1991, 1992.

[11] *The Cambridge Companion to Bertrand Russell.* Edited by Nicholas Griffin. Cambridge University Press. Cambridge, UK. First published 2003.

[12] Georg Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind.* Herausgegeben von Ernst Zermelo. Julius Springer. Berlin. 1932. (Springer Collected Works in Mathematics. Reprint 2013 from the 1980 edition.)

[13] Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician.* London Mathematical Society. Student Texts, Volume 39. Cambridge University Press. Cambridge. 1997.

[14] Richard Courant, Fritz John. *Introduction to Calculus and Analysis I, II.* John Wiley & Sons. New York, London, Sydney, Toronto. 1965, 1974.

[15] Richard Courant, Herbert Robbins. *Was ist Mathematik?* Dritte Auflage. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1973.

[16] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey. 1976.

[17] Gerard Debreu. *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium.* Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph 17. Copyright 1959 by Cowles Foundation. Copyright renewed 1987 by Gerard Debreu. Yale University Press, New Haven, London. 22. Edition.

[18] Gerard Debreu. *Mathematical Economics.* Twenty Papers of Gerard Debreu. Introduction by Werner Hildenbrand. Econometric Society Monographs No. 4. Cambridge University Press. Cambridge, London, New York. First Paperback Editon 1986. Transferred to Digital Printing 2006. Printed in Germany by Amazon Distribution GmbH, Leipzig.

[19] Richard Dedekind. *Theory of Algebraic Numbers.* Cambridge Mathematical Library. Translated an introduced by John Stillwell. Cambrdge University Press. Cambridge, GB. New York, USA. Melbourne, Australia. 1996. (First published in French 1877. First published in English 1996. Transferred to digital printing 2004.)

[20] Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Deutsche Erstausgabe, Vieweg, Braunschweig, 1872, 1887. Friedrich Vieweg & Sohn. Braunschweig. 1965.

[21] Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Cambridge Library Collection. Cambridge University Press 2012. This edition first published 1893. (Braunschweig. Friedrich Vieweg und Sohn. 1893.) This digitally printed version 2012.

[22] Oliver Deiser. *Einführung in die Mengenlehre.* Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo. Dritte, korrigierte Auflage. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. 2010.

[23] Keith Devlin. *The Joy of Sets.* Fundamentals of Contemporary Set Theory. Second Edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. 1979, 1993.

[24] Jean Dieudonné. *Grundzüge der modernen Analysis 1, 2, 3, 4, 5/6, 7, 8, 9.* Friedrich Vieweg & Sohn. Braunschweig, Braunschweig/Wiesbaden. 1973, 1975, 1976, 1976, 1979, 1982, 1983, 1987.

[25] Jean Dieudonné. *Calcul Infinitésimal.* Deuxième édition revue et corrigée. Collection Méthodes. Hermann, Éditeurs des Sciences et des Artes. Nouveau tirage, 1992.

[26] Duden. Deutsches Universalwörterbuch. Vierte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Herausgegeben von der Dudenredaktion. Dudenverlag. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich. 2001.

[27] Bruce Ebanks, Prasanna Sahoo, Wolfgang Sander. *Characterizations of Information Measures.* Word Scientific. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. 1998.

[28] Heinz-Dieter Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre.* Hochschultaschenbuch. Vierte Auflage. Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg, Berlin. 2003.

[29] Richard S. Ellis. *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics.* Classics in Mathematics. Reprint of the 1985 Edition. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. 2006.

[30] Encyclopædia Britannica. Encyclopædia Britannica Ultimate Reference Suite. Chicago: Encyclopædia Britannica, 2014. Published by ≪`www.britannica.co.uk`≫. PC/MAC DVD-Rom. United Soft Media Verlag. 2013.

[31] Friedhelm Erwe. *Differential- und Integralrechnung I, II.* BI Bibliographisches Institut. Mannheim, Wien, Zürich. 1970, 1969.

[32] Ljudvig Dimitrievich Faddeev. *40 Years in Mathematical Physics.* World Scientific Publishing. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. 1996.

[33] Otto Forster. *Analysis 1, 2, 3.* Friedrich Vieweg. Braunschweig, Wiesbaden. 2006, 2006, 1984.

[34] Gerhard Frey. *Elementare Zahlentheorie.* Vieweg Studium. Grundkurs Mathematik. Friedrich Vieweg und Sohn. Braunschweig, Wiesbaden. 1984.

[35] Ulf Friedrichsdorf, Alexander Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker.* Vieweg Studium, Band 58. Grundkurs Mathematik. Friedrich Vieweg. Braunschweig, Wiesbaden. 1985.

[36] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik. *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science.* Dedicated to Leonhard Euler (1707-1783). Addison Wesley. Reading, Massachusetts. 1994.

[37] Hans Grauert, Ingo Lieb, Wolfgang Fischer. *Differential- und Integralrechnung I, II, III.* Zweite, erste, erste Auflage. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1970, 1968, 1968.

[38] Paul R. Halmos. *Naive Set Thery.* The University Series in Undergraduate Mathematics. D. van Nostrand Company. Princeton, New Jersey. April 1960. Reprinted January 1961.

[39] Wolfgang Haack. *Elementare Differentialgeometrie.* Mathematische Reihe, Band 20. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Birkhäuser Verlag. Basel und Stuttgart. 1955.

[40] Ernst Hairer, Gerhard Wanner. *Analysis by Its History.* Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. Corrected Third Printing, 2000.

[41] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond.* Berlin, Heidelberg, New York. 2000.

[42] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Reprint of the orginal 1914 edition. AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. Reprinted by the American Mathematical Society, 1949. Third Printing, 1978.

[43] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis 1, 2.* B. G. Teubner. Stuttgart. 2006, 2004.

[44] Edwin Hewitt, Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Graduate Texts in Mathematics, Volume 25. Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin. Third Printing, 1975.

[45] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* 10. Auflage. Mit Supplementen von Paul Bernays. Teubner. Stuttgart. 1968.

[46] David Hilbert, Wilhelm Ackermann. *Principles of Mathematical Logic.* Translated form the German by Lewis M. Hammond, George G. Leckie, F. Steinhardt. Edited and with notes by Robert E. Luce. Reprinted by the American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 1999, 2008

[47] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos.* Third Edition. Academic Press. Oxford, 2013.

[48] Deborah Hughes-Hallet, Andrew M. Gleason, William G. McCallum, et al. *Calculus.* John Wiley and Sons. New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapor, Toronto. 2002.

[49] Joachim Jaenicke. *Analysis 1.* Vorlesung an der TU Braunschweig. Wintersemester 1994/95. Mitschrift und Aufgaben von WM.

[50] Thomas Jech. *Set Theory.* The Third Millenium Edition, Revised and Expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. 1997, 2003. Corrected 4th printing 2006.

[51] Irving Kaplansky. *Set Theory and Metric Spaces.* AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. Reprinted by the American Mathematical Society, 2001, 2008. Originally published, 1972 at Boston, Masachusetts.

[52] Anthony W. Knapp. *Basic Real Analysis.* Cornerstones. Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin. 2005.

[53] Anthony W. Knapp. *Basic Advanced Analysis.* Cornerstones. Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin. 2005.

[54] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming 1, 2, 3.* Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing. Second Edition, Second Edition, First Edition. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachuetts. 1973, 1981, 1973.

[55] Max Koecher. *Klassische elementare Analysis.* Birkhäuser Verlag. Basel, Boston. 1987.

[56] Konrad Königsberger. *Analysis 1, 2.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 2003, 2004.

[57] Hans-Joachim Kowalsky. *Vektoranalysis I, II.* Walter de Gruyter. Berlin, New York. 1974, 1976.

[58] Rainer Kress. *Numerical Analysis.* Graduate Texts in Mathematics 181. Spriner-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. 1998.

[59] Harold W. Kuhn, Sylvia Nasar. *The Essential John Nash.* Princeton University Press. Princeton, Oxford. 2001.

[60] Kenneth K. Kuttler. *Modern Analysis.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press. Boca Raton, Boston, New York, Washington, London. 1998.

[61] Edmund Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* First Edition, in Two Volumes, 1909. AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. Reprinted by the American Mathematical Society, 2000.

[62] Edmund Landau. *Grundlagen der Analysis.* Deutsche Erstausgabe, Leipzig, 1930. AMS Chelsea Publishing, 1951. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. Fourth Printing, 1965.

[63] Serge Lang. *Analysis I.* Second Printing. Addison Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts. May 1969.

[64] Serge Lang. *Real and Functional Analysis.* Third Edition. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. 1993.

[65] Elliot H. Lieb, Michael Loss. *Analysis.* Second Edition. Graduate Studies in Mathematics, Volume 14. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 2001.

[66] Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis.* Second Edition. W. H. Freeman and Company. New York. 1993.

[67] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba. *Vektoranalysis.* Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg, Berlin, Oxford. 1995.

[68] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba. *Vector Calculus.* W. H. Freeman and Company. New York. 2003.

[69] Herbert Meschkowski (Hrsg.). *Das Problem des Unendlichen.* Mathematische und philosophische Texte von Bolzano, Gutberlet, Cantor, Dedekind. dtv text-bibliothek 6030. Deutscher Taschenbuch Verlag. München. Juli 1974.

[70] Ernest Nagel, James R. Newman. *Gödel's Proof.* Revised Fifthieth-Anniversary Edition. Edited and with a new foreword by Douglas R. Hofstadter. New York University Press. New York, London. 2001.

[71] Johann von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Unveränderter Nachdruck der ersten Auflage von 1932. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1968.

[72] *A New History of German Literatur.* David E. Wellbery, Editor-in-Chief. Judith Ryan, General Editor. The Belknap Press of Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts. London, England. 2004.

[73] Andrew Pressley. *Elementary Differential Geometry.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag. London, Berlin, Heidelberg. 2001.

[74] *Princeton Companion to Mathematics.* Edited by Timothy Gowors, June Barrow-Green, Imre Leader. Princeton University Press, Princeton, 2008.

[75] Harvey E. Rose. *A Course in Number Theory.* Second Edition. Oxford Science Publications. Clarendon Press. Oxford. 1994.

[76] Kenneth A. Ross. *Elementary Analysis. The Theory of Calculus.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Science. New York. 1980.

[77] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition. McGraw-Hill. New York, St. Louis, San Francisco, Sydney, Tokyo, Toronto. 1976.

[78] David Ruelle. *Chance and Chaos.* Princeton Science Library. Princeton University Press. Princeton, Oxford. 1991.

[79] David Ruelle. *The Mathematician's Brain.* Princeton University Press. Princeton, Oxford. 2007.

[80] Bertrand Russell. *Einführung in die mathematische Philosophie.* Mit einer Einleitung von Michael Otte. Herausgegeben von Johannes Lenhard und Michael Otte. Meiner. Philosophische Bibliothek. Felix Meiner Verlag. Hamburg. Zweite Auflage 2006. (Bertrand Russell. An Introduction to Mathematical Philosophy. Originally published: 2$^{\text{nd}}$ ed. London: G. Alllan and Unwin; New York: Macmillan, 1919.)

[81] Bertrand Russell, Alfred North Whitehead. *Principia Mathematica.* Vorwort und Einleitungen. Mit einem Vorwort von Kurt Gödel. Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft, stw 593. Dritte Auflage. Suhrkamp Verlag, Frankfurt. 1994.

[82] Paul A. Samuelson, Willard D. Nordhaus, Michael J. Mandel. *Economics.* Fifteenth Edition. International Edition. McGraw-Hill. New York, St. Louis, San Francisco, Sydney, Tokyo, Toronto. 1995.

[83] Jürgen Schmidt. *Mengenlehre.* Band 1, Grundbegriffe. Hochschultaschenbücher, Band 56. Bibliographisches Institut. Mannheim, Wien, Zürich. 1974.

[84] Jacob T. Schwartz. *Lectures on the Mathematical Methods in Analytical Economics.* Mathematics and its Applications, Volume 1. Gordan and Breach. Science Publishers. New York. 1961.

[85] Claude E. Shannon, Warren Weaver. *The Mathematical Theory of Communication.* First Edition, 1949. The University of Illinois Press. Urbana, Chicago, London. 1998.

[86] Thomas Sonar. *3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen.* In der Reihe *Vom Zählstein zum Computer*. Herausgegeben von Heinz-Wilhelm Alten u.a.. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg. 2011.

[87] Thomas Sonar. *Der fromme Tafelmacher. Die frühen Arbeiten des Henry Briggs.* Logos Verlag. Berlin. 2002.

[88] Rayadurgam Srikant. *The Mathematics of Internet Congestion Control.* System and Control. Foundations and Applications. Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin. 2004.

[89] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. *Princeton Lectures in Analysis I, II, III.* Princeton University Press. Princeton, Oxford. 2003, 2003, 2005.

[90] John Stillwell. *Elements of Number Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. 2003.

[91] John Stillwell. *Roads to Infinity.* The Mathematics of Truth and Proof. A. K. Peters. Natick, Massachusetts. 2010.

[92] Uwe Storch, Hartmut Wiebe. *Lehrbuch der Mathematik 1, 2, 3, 4.* BI Wissenschaftsverlag. Mannheim, Wien, Zürich. 1989, 1990, 1993, 2001.

[93] Otto Toeplitz. *The Calculus. A Genetic Approach.* New Foreword David Bressoud. Published in Association with the Mathematical Association of America. The University of Chicago Press. Chicago, London. Published 2007.

[94] Flemming Topsøe. *Informationstheorie.* Teubner Studienbücher, Mathematik. B. G. Teubner. Stuttgart. 1974.

[95] V. S. Varadarajan. *Euler Through Time: A New Look at Old Themes.* American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 2006.

Braunschweig, den 6.5.2015 WM